9.

9. METODA SIŁ

Metoda sił jest sposobem rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych, czyli układów o nadliczbowych więzach (zewnętrznych i wewnętrznych). Sprowadza się ona do rozwiązania układu statycznie wyznaczalnego (układ podstawowy w metodzie sił), który powstaje z niewyznaczalnego układu rzeczywistego przez wprowadzenie w miejsce odrzuconych więzów niewiadomych sił. Jest to prosty sposób na rozwiązanie układów ramowych, kratowych czy łukowych. W niniejszym rozdziale omówione zostaną ogólne założenia oraz tok postępowania obliczeniowego w metodzie sił.

9.1. Zasady ogólne w metodzie sił

Istota metody opiera się na pozbawieniu rozpatrywanego, obciążonego układu nadliczbowych więzów, dbając jednak przy tym o to, aby pozostał on geometrycznie niezmienny. W miejsce myślowo usuniętych więzów wstawiamy niewiadome siły. Następnie, aby zachować kinematyczną identyczność układu rzeczywistego z nowym, nazywanym dalej układem podstawowym w metodzie sił, określamy sumaryczne przemieszczenia po kierunkach działania tych sił. Ponieważ w rzeczywistości w tych miejscach istniały więzy, przemieszczenia te są równe zero. Układając te warunki w równania otrzymujemy wyznaczalny układ, a zatem możemy obliczyć wartości nadliczbowych niewiadomych .

Układ podstawowy, który na ogół jest układem statycznie wyznaczalnym, musi spełniać również trzy warunki odpowiedniości:

– identyczność geometryczna (zgodność wymiarów),
– identyczność kinematyczna (zgodność przemieszczeń – równania kanoniczne),
– identyczność statyczna (zgodność obciążeń).

Stopień statycznej niewyznaczalności (*SSN*) – jest to liczba nadliczbowych więzów (zewnętrznych i wewnętrznych), które należy odrzucić, aby układ stał się statycznie wyznaczalny.

Przyjrzyjmy się zatem kolejnym etapom rozwiązania zadania metodą sił.

9.2. Przyjęcie układu podstawowego

Interesujący nas układ rzeczywisty statycznie niewyznaczalny pozbawiamy nadliczbowych więzów (dokładnie tylu, ile wynosi *SSN*). Otrzymujemy w wyniku tego zabiegu układ statycznie wyznaczalny, który musi być również kinematycznie (geometrycznie) niezmienny. Taki zastępczy układ nazywamy podstawowym. Możemy łatwo zauważyć, że w miejscach usuniętych przez nas więzów możliwe jest teraz przemieszczenie po ich kierunkach. Na ogół istnieje parę możliwości wyboru okładu podstawowego, nas jednak interesuje wybór najlepszego (najbardziej odpowiedniego), czyli najmniej pracochłonnego (tak, aby jak najwięcej przemieszczeń w układzie równań kanonicznych było równych zero).

9.3. Wprowadzenie nadliczbowych więzów

W miejsce usuniętych więzów w układzie podstawowym wprowadzamy niewiadome X_1, X_2, ..., X_n będące siłami uogólnionymi. W przypadku usunięcia więzu uniemożliwiającego przesunięcie wprowadzamy siłę skupioną, a w miejsce utwierdzenia uniemożliwiającego obrót wprowadzamy niewiadomą w postaci momentu skupionego. Możliwe jest również wprowadzenie uogólnionych sił w postaci grupy sił.

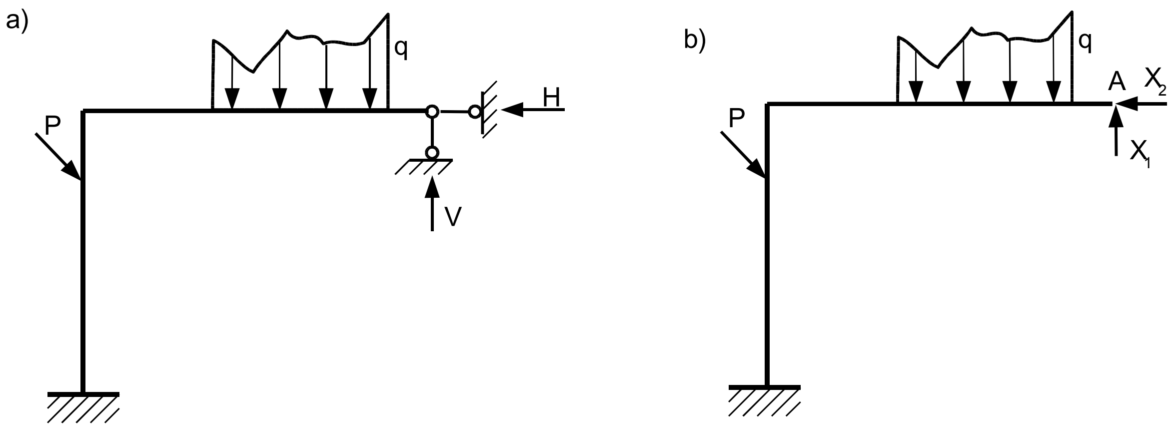
9.4. Dobór układu równań kanonicznych oraz interpretacja jego współczynników

Równania kanoniczne są nieodłącznym składnikiem układu podstawowego, gdyż zapewniają kinematyczną zgodność z układem rzeczywistym. Dzięki nim możemy obliczyć wartości niewiadomych sił uogólnionych. Poszczególne równania układu są zsumowanymi przemieszczeniami po kierunkach odrzuconych więzów. W rzeczywistości przemieszczenia te są zerowe, ponieważ w tych miejscach są podpory uogólnione. Liczba równań jest zatem taka sama jak liczba odrzuconych więzów.

W celu obliczenia przemieszczeń spowodowanych nieznanymi siłami posłużymy się zasadą superpozycji oraz jednostkowymi siłami przykładanymi w miejscach niewiadomych X_i . Przyjęliśmy symbole:

Δ_{ik} - przemieszczenie punktu w rzeczywistej konstrukcji,
δ_{ik} - przemieszczenie wywołane przyczyną jednostkową (siłą jednostkową),
gdzie indeksy oznaczają kolejno kierunek przemieszczenia oraz jego przyczynę,
(P) - dane obciążenie układu.

W celu zobrazowania tego zagadnienia posłużymy się przykładem. Dany jest układ ramowy (rys. 9.1. a), statycznie niewyznaczalny i obciążony siłami zewnętrznymi.



Rys. 9.1. a) Układ rzeczywisty b) Układ podstawowy

Jak widzimy układ jest statycznie niewyznaczalny, a jego $SSN=2$. Sprowadzamy zadanie do dowolnego układu statycznie wyznaczalnego i kinematycznie niezmiennego, zachowując obciążenia zewnętrzne, a w miejsce usuniętych więzów wstawiamy niewiadome siły X_1 , X_2 (rys. 9.1. b). Układ podstawowy przez nas przyjęty spełnia dwa warunki odpowiedniości z układem rzeczywistym (identyczność geometryczna i statyczna), nie jest on jednak zgodny kinematycznie, zgodność tą zapewniają równania kanoniczne. Przystąpmy zatem do ich wyznaczenia, w tym celu przyjrzymy się bliżej rzeczywistemu przemieszczeniu punktu A. W układzie rzeczywistym w tym miejscu znajduje się podpora przegubowa, niemożliwe jest więc przemieszczenie tego punktu po kierunkach V i H , a więc po kierunkach działania w układzie podstawowym niewiadomych X_1 , X_2 . Zatem przemieszczenia te będą równe zeru.

$$\begin{cases} \Delta_A^{(V)}=0 \\ \Delta_A^{(H)}=0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Zastanówmy się więc, co wywołuje pionowe przemieszczenie punktu A w układzie podstawowym.

Przyczynami są siły X_1, X_2 oraz obciążenie zewnętrzne P. Przemieszczenie to możemy zatem zapisać jako sumę przemieszczeń wywołanych poszczególnymi przyczynami:

$$\begin{cases} \Delta_A^{(V)}(X_1)+\Delta_A^{(V)}(X_2)+\Delta_A^{(V)}(P)=0 \\ \Delta_A^{(H)}(X_1)+\Delta_A^{(H)}(X_2)+\Delta_A^{(H)}(P)=0 \end{cases} \tag{9.2}$$

Zapisując czytelniej symbolami δ_{ik}, otrzymamy układ równań kanonicznych:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0 \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0 \end{cases} \tag{9.3}$$

gdzie:

δ_{ik} - przemieszczenie po kierunku niewiadomej X_i wywołane działaniem jednostkowej siły $X_k=1$,

Δ_{iP} - przemieszczeni uogólnione po kierunku niewiadomej X_i wywołane działaniem danego obciążenia zewnętrznego P.

Możemy zapisać zatem dany układ równań kanonicznych w postaci wskaźnikowej (w postaci jednego ogólnego wzoru):

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}X_j+\Delta_{iP}=0 \qquad\qquad i=1,2 \tag{9.4}$$

Lub w postaci macierzowej:

$$[F]\{X\}+\{\Delta_P\}=\{0\} \tag{9.5}$$

gdzie:

$[F]=[\delta_{ik}]$ - macierz podatności układu.

Zadanie sprowadza się zatem do obliczenia pewnej liczby równań metody sił.

Współczynniki równań kanonicznych δ_{ik} obliczamy ze wzoru, który w ogólnym przypadku dla płaskiego układu ma postać:

$$\delta_{ik}=\sum\left\{\int_s \frac{M_i M_k}{EJ}ds+\int_s \frac{N_i N_k}{EA}ds+\int_s \frac{\kappa T_i T_k}{GA}ds\right\} \tag{9.6}$$

gdzie:

M_i, M_k - momenty zginające wywołane działaniem siły $X_i=1$ i $X_k=1$,

N_i, N_k - siły normalne wywołane działaniem siły $X_i=1$ i $X_k=1$,

T_i, T_k - siły tnące wywołane działaniem siły $X_i=1$ i $X_k=1$,

J - moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,

E, G - moduły sprężystości liniowej i poprzecznej (stałe materiałowe),

κ - współczynnik ścinania (współczynnik korekcyjny).

Sumowanie odbywa się po wszystkich prętach układu (bądź przedziałach w których funkcja siły wewnętrznej zmienia postać).

Zgodnie z twierdzeniem Maxwella o wzajemności przemieszczeń wiemy, że:

$$\delta_{ik}=\delta_{ki} \tag{9.7}$$

Wobec tego macierz podatności musi być symetryczna względem głównej przekątnej.

Współczynnik Δ_{iP} opisujący przemieszczenie punktu po kierunku i, spowodowane przez siły zewnętrzne P opisuje wzór:

$$\Delta_{iP}=\sum\left\{\int_s \frac{M_i M_P^0}{EJ}ds+\int_s \frac{N_i N_P^0}{EA}ds+\int_s \frac{\kappa T_i T_P^0}{GA}ds\right\} \tag{9.8}$$

gdzie:

M_i -momenty zginające wywołane działaniem siły $X_i=1$,

M_P^0 -momenty zginające wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P w układzie podstawowym,

N_i -siły normalne wywołane działaniem siły $X_i=1$,

N_P^0 -siły normalne wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P wyznaczone w układzie podstawowym,

T_i -siły tnące wywołane działaniem siły $X_i=1$,

T_P^0 -siły tnące wywołane działaniem obciążeń zewnętrznych P wyznaczone w układzie podstawowym,

J -moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,

E, G -moduły sprężystości liniowej i poprzecznej (stałe materiałowe),

κ -współczynnik ścinania.

Całki we wzorach (9.6) i (9.8) możemy obliczyć numerycznie korzystając ze sposobu Wereszczagina-Mohra.

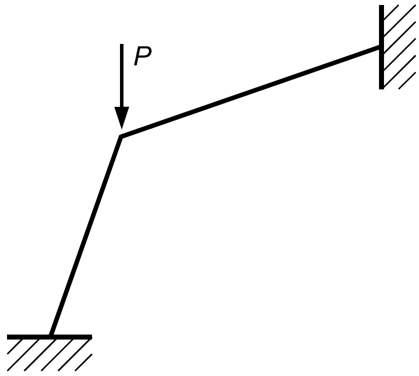
W rzeczywistości wpływ sił normalnych i tnących na przemieszczenie jest znikomy w porównaniu z wpływem momentu zginającego, dlatego przeważnie we wzorach (9.6) i (9.8) części uwzględniające siły normalne i tnące pomijamy (nie dotyczy to kratownic, łuków, itp.).

9.5. Przyjęcie układu podstawowego przy pomocy użycia bieguna sprężystego

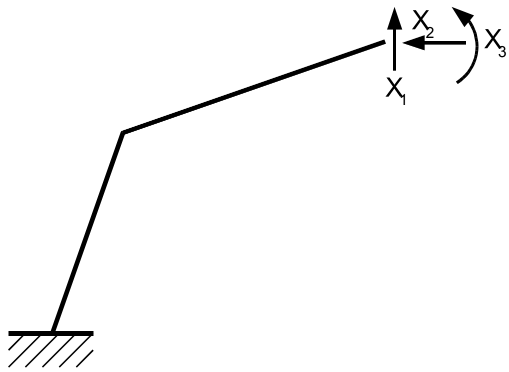
Metoda ta polega na usytuowaniu w układzie podstawowym niewiadomych sił X na ramieniu pręta o momencie bezwładności dążącym do nieskończoności tak, aby otrzymać wykresy momentów z mnożenia których odpowiednie przemieszczenia w układzie równań kanonicznych były równe zero (rys. 9.2). Otrzymujemy w tym przypadku zamiast układu równań o n niewiadomych, n równań liniowych pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Przykład 1

Przyjąć układ podstawowy dla ramy:



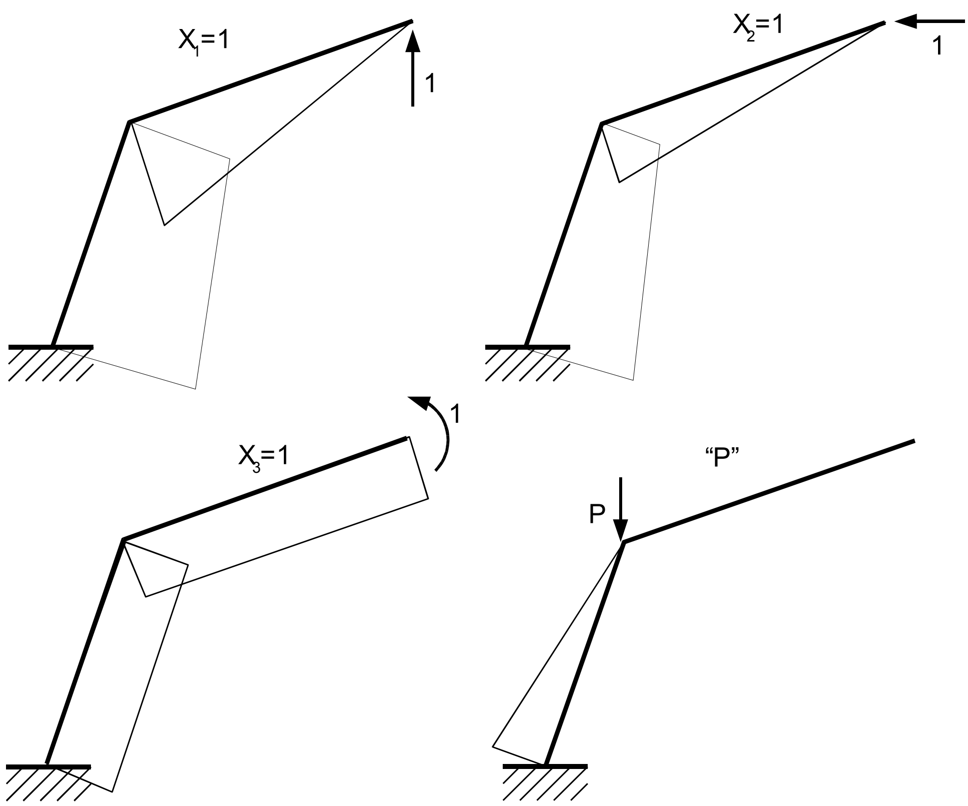
Odrzucając jedną podporę otrzymamy układ podstawowy,



któremu towarzyszy mu układ równań kanonicznych

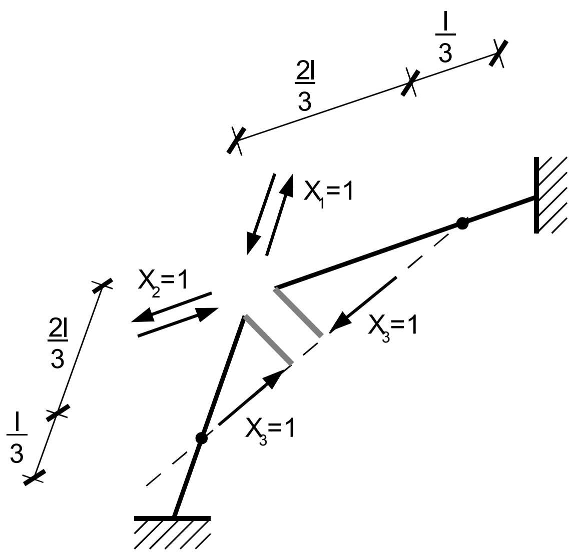
$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \tag{9.9}$$

Ponieważ wykresy momentów w poszczególnych stanach obejmują całą ramę,

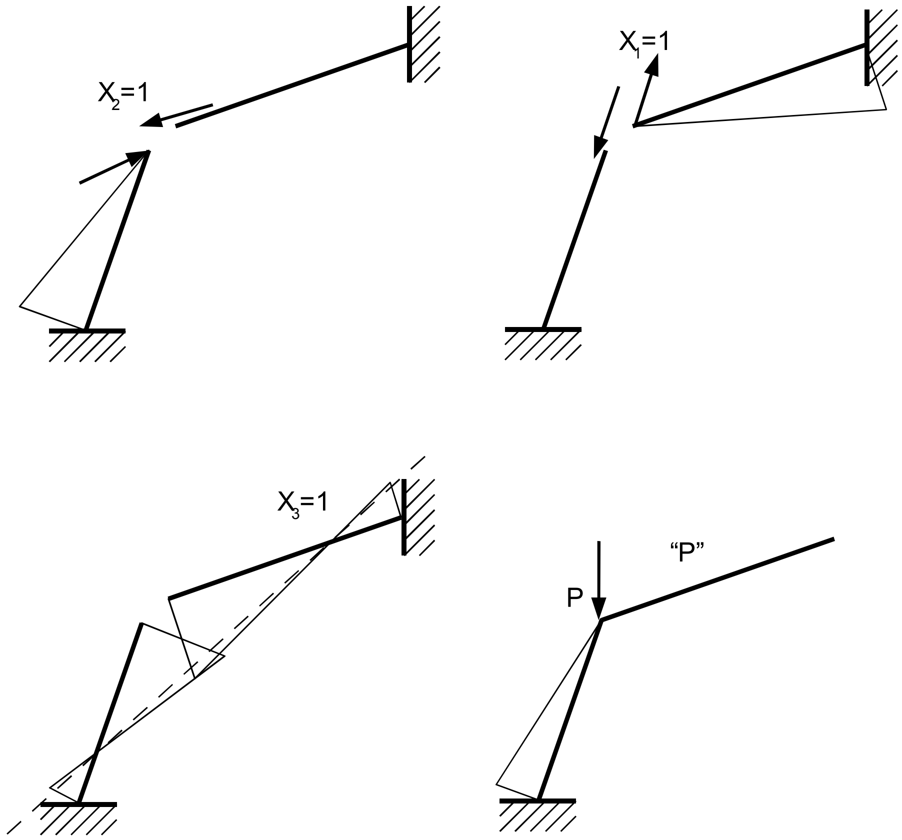


wszystkie współczynniki są różne od zera.

Przyjmijmy teraz inny układ podstawowy z biegunem sprężystym



wtedy wykresy momentów ograniczają się do części układu:



i większość współczynników macierzy podatności jest równa zeru.

Środki ciężkości trójkątów *(M_1 i M_2)* odpowiadają zerowym wartością na wykresie M_3

$$\begin{aligned} \delta_{12}&=\delta_{21}=0\\ \delta_{13}&=\delta_{31}=0\\ \delta_{23}&=\delta_{32}=0 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Ostatecznie zamiast układu trzech równań musimy rozwiązać trzy proste równania:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1=-\Delta_{1P}\\ \delta_{22} X_2=-\Delta_{2P}\\ \delta_{33} X_3=-\Delta_{3P} \end{cases} \tag{9.11}$$

Dzięki biegunowi sprężystemu obliczenia znacznie się uprościły.