

Olga Kopacz, Adam Łodygowski, Krzysztof Tymper,  
Michał Płotkowiak, Wojciech Pawłowski  
Konsultacje naukowe: prof. dr hab. JERZY RAKOWSKI  
Poznań 2002/2003

## MECHANIKA BUDOWLI 14

### **Drgania podłużne oraz skrętne prętów pryzmatycznych o ciągłym rozkładzie masy.**

Dotychczas rozpatrywaliśmy jedynie drgania poprzeczne prętów (tzn. takie, które powodują ruchy cząstek pręta prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali) zakładając, że mają one zasadnicze znaczenie w dynamice budowli. Zauważmy jednak, że w złożonych układach prętowych (np. ramach), zależnie od ich geometrii, drgania poprzeczne przekazują się na inne pręty jako: również poprzeczne bądź właśnie podłużne (tzn. takie, które powodują ruchy cząstek pręta wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali) lub skrętne. Zauważmy również, że podana wyżej własność ma charakter odwrotny tzn. z drgań podłużnych czy skrętnych mogą powstać poprzeczne.

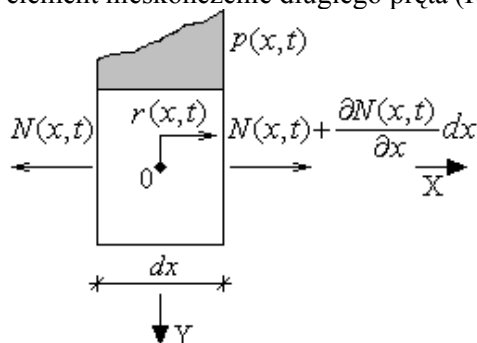
#### **1.1. Równanie ruchu pręta, gdy ruch ten jest skutkiem działania dowolnych drgań podłużnych.**

a) założenia:

- drgania harmoniczne (okresowe, periodyczne, czyli powtarzające się w regularnych odstępach czasowych), równoległe do osi pręta
- układ idealny (tzn. brak jakiegokolwiek tłumienia ruchu)
- małe przemieszczenia pręta (małe ruchy)
- ciągły, liniowy rozkład masy w pręcie
- pomijamy skrócenia bądź wydłużenia pręta

b) wyprowadzenie

Wytnijmy myślowo element nieskończenie długiego pręta (Rys. 1.1.1).



Rys. 1.1.1 Wycięty myślowo element rozpatrywanego pręta wraz z działającymi na niego siłami

Z sumy rzutów na oś X (Rys. 1.1.1) możemy zapisać:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -N(x,t) + N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t)dx + r(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t)dx + r(x,t) = 0 \quad (1.1.1)$$

gdzie:

-  $r(x,t)$  – siła tłumienia (oporu) ruchu wynikająca z faktu drgania pręta (siła bezwładności liniowej) równa:

$$r(x,t) = -dm \cdot \ddot{u}(x,t) = -dm \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.1.2)$$

gdzie:

-  $u(x,t)$  – przemieszczenie elementu wzdłuż osi X zależne od czasu t

-  $\ddot{u}(x,t)$  - przyspieszenie elementu wzdłuż osi X

-  $dm$  – masa rozpatrywanego elementu równa na podstawie prostych zależności fizycznych, iloczynowi objętości  $dV$  i gęstości  $\rho$  (masy właściwej):

$$dm = dV \cdot \rho = A \cdot dx \cdot \rho \quad (1.1.3)$$

Znak minus we wzorze (1.1.2), wynika z faktu przeciwnego zwrotu siły bezwładności do siły powodującej ruch.

Po uwzględnieniu we wzorze (1.1.1) zależności (1.1.2) i (1.1.3) otrzymamy:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t)dx - A \cdot dx \cdot \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad /: (A \cdot dx \cdot \rho)$$

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{1}{A \cdot \rho} + \frac{p(x,t)}{A \cdot \rho} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.4)$$

Na podstawie definicji siły normalnej oraz po uwzględnieniu faktu jednorodności materiału, z którego zbudowany jest pręt, możemy zapisać:

$$N(x,t) = \int_A \sigma(x,t) \cdot dA = \sigma(x,t) \cdot A \quad (1.1.5)$$

Na podstawie prawa Hooke'a możemy zapisać:

$$\sigma(x,t) = E \cdot \varepsilon(x,t) \quad (1.1.6)$$

Zauważymy również, że oś X jest główną osią odkształcenia a ponieważ mamy do czynienia z małymi przemieszczeniami, możemy zapisać:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (1.1.7)$$

Po uwzględnieniu wzorów (1.1.6) i (1.1.7) we wzorze (1.1.5), oraz po zróżniczkowaniu otrzymanego w ten sposób wyrażenia względem x otrzymamy:

$$N(x,t) = A \cdot E \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.1.8)$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia (1.1.8) do wzoru (1.1.4):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cdot \frac{A \cdot E}{A \cdot \rho} + \frac{p(x,t)}{A \cdot \rho} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

i po odpowiednich przekształceniach otrzymamy następujące równanie:

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p(x,t)}{A \cdot \rho} \quad (1.1.9)$$

Powyższe równanie (1.1.9) to równanie (różniczkowe) ruchu (tzw. równanie falowe) nieograniczonego pręta o liniowym rozkładzie masy, gdy ruch ten jest skutkiem działania dowolnych, wymuszonych drgań podłużnych.

Jak widzimy relacje we wzorze (1.1.9) są dość proste (równanie różniczkowe rzędu 2) a jedyny problem przy ich interpretacji może budzić stała c. Stała ta jest postacią rozchodzenia się fali zaburzenia w pręcie nieograniczonym a inaczej rzecz ujmując jest to prędkość rozchodzenia się tej fali, zależna od dwóch stałych materiałowych: modułu Younga (sprężystości) E i gęstości (masy właściwej) ρ:

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.1.10)$$

Należy przypomnieć, że choć fala zaburzenia się przemieszcza, cząstki pręta pozostają w miejscu, poruszając się jedynie do przodu i do tyłu, ale nie uczestnicząc w poziomej prędkości rozchodzenia się zaburzenia. Najlepszym przykładem to obrazującym jest rozchodzenie się fali zaburzenia wzdłuż napiętej liny.

Gdy mamy do czynienia z drganiami własnymi (bez żadnych wymuszeń) wzór (1.1.9) przyjmie następującą postać:

$$p(x,t)=0 \Rightarrow c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.11)$$

c) rozwiązanie

Szukamy ogólnego rozwiązania równania różniczkowego (całki ogólnej), dla wzoru (1.1.11).

Rozwiążmy te równanie metodą rozdzielania zmiennych tzn. założmy, że istnieje taka funkcja  $u(x,t)$ , która składa się z iloczynu dwóch funkcji, zależnych tylko i wyłącznie od jej pojedynczych zmiennych tzn. od czasu „ $t$ ” (funkcja czasu -  $T(t)$ ) oraz od przestrzeni „ $x$ ” (funkcja przestrzeni -  $U(x)$ ).

$$u(x,t) = T(t) \cdot U(x)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \cdot T(t) - \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \cdot U(x) = 0 \quad /: [T(t) \cdot U(x)]$$

$$\frac{c^2 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}}{U(x)} = \frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} \quad (1.1.12)$$

Aby lewa strona tego równania (funkcja przestrzeni) była równa prawej (funkcji czasu), w danym punkcie czasoprzestrzeni, funkcje te muszą osiągnąć w tym punkcie jakąś stałą wartość (skalar). Wartość tą oznaczymy przez  $\omega^2$ .

$$\frac{c^2 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}}{U(x)} = \frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = \omega^2 \quad (1.1.13)$$

W ten sposób dostaliśmy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - \omega^2 \cdot T(t) = 0 & \Rightarrow 1^0 \\ \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - k^2 \cdot U(x) = 0 & \Rightarrow 2^0 \end{cases} \quad (1.1.14)$$

gdzie:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{E} \quad (1.1.15)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań (1.1.14) dostaniemy:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad T(t) &= C_1 \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t \\ 2^0 \quad U(x) &= A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

stąd rozwiązanie ogólne (całka ogólna) przyjmie postać:

$$u(x, t) = T(t) \cdot U(x) = (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \cdot (A \sin kx + B \cos kx) \quad (1.1.17)$$

Na podstawie powyższego ogólnego rozwiązania równania różniczkowego (całki ogólnej) wzór (1.1.17) spróbujmy znaleźć rozwiązanie szczególne.

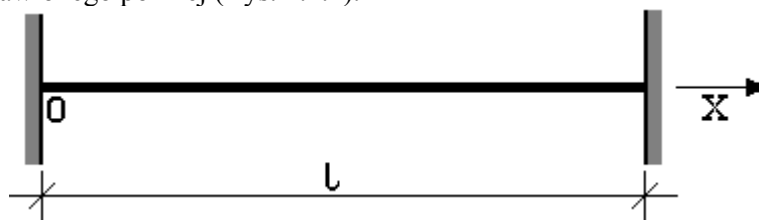
Wyrażenie  $1^0$  (1.1.16) rozwiązaliśmy na wykładach poprzednich:

$$T(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.1.18)$$

gdzie:

- a i  $\varphi$  otrzymane z warunków początkowych zadania
- $\omega$  (częstość kołowa drgań własnych) otrzymana z warunków brzegowych zadania (wyliczona w dalszej części – wzór 1.1.24)

Wyrażenie  $2^0$  (1.1.16) rozwiążemy uwzględniając warunki brzegowe dla układu przedstawionego poniżej (Rys. 1.1.2).



Rys. 1.1.2 Pręt obustronnie utwierdzony jako przykładowe zadanie

Skorzystajmy z kinematycznych warunków brzegowych, tzn. wykorzystajmy fakt, że w każdej chwili czasu nie ma przemieszczeń poziomych pręta w podporach (1.1.19).

$$I^0 \quad U(0) = 0 \qquad II^0 \quad U(l) = 0 \quad (1.1.19)$$

Po uwzględnieniu powyższych warunków (1.1.19) w wyrażeniu 2<sup>o</sup> całki ogólnej (1.1.16) otrzymamy:

$$\begin{aligned} I^0 \quad U(0) &= A \sin k \cdot 0 + B \cos k \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ II^0 \quad U(l) &= A \sin k \cdot l + B \cos k \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad A \sin k \cdot l = 0 \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Z warunku II<sup>0</sup> (1.1.20) otrzymamy:

$$A \sin k \cdot l = 0 / : A \Rightarrow \sin k \cdot l = \sin 0 \Rightarrow k \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{n \cdot \pi}{l} \quad (1.1.21)$$

Stąd wyrażenie 2<sup>o</sup> (1.1.16) przyjmie postać:

$$U(x) = A \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x \quad (1.1.22)$$

Po uwzględnieniu rozwiązań szczególnych (1.1.18) i (1.1.22) w rozwiązaniu ogólnym (1.1.17) otrzymamy następujące równanie:

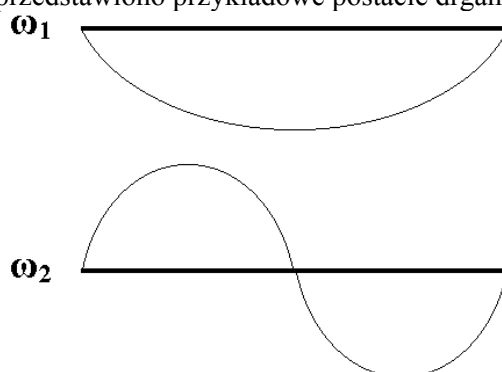
$$u_n(x, t) = U(x) \cdot T(t) = A_n \sin \left( \frac{n \cdot \pi}{l} x \right) \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1.1.23)$$

Równanie to (1.1.23) zwane funkcją własną, jest n-tą postacią drgań własnych, czyli opisuje zespół przemieszczeń przyporządkowany odpowiedniej n-tej częstości kołowej drgań własnych. W tym momencie musimy nadać tej częstości odpowiednią interpretację. W tym celu skorzystamy z zależności wyprowadzonych wcześniej (1.1.21):

$$k^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \quad \text{gdzie:} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{więc:} \quad \omega_n^2 = \frac{c^2 \cdot n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \quad (1.1.24)$$

W ten sposób w naszym przypadku uzyskaliśmy konkretną wartość częstości kołowej drgań własnych, zależną jedynie od charakterystyki belki.

Na rysunku 1.1.3 przedstawiono przykładowe postacie drgań własnych.



Rys. 1.1.3 Przykładowe postacie drgań własnych

Warto zaznaczyć, że powyższe wykresy (Rys. 1.1.3) obrazują wychylenia podłużne pręta i opisane są funkcją sinusoidalną, której liczba punktów zerowych wynosi  $n-1$ .

Na zakończenie tego podpunktu przedstawmy jeszcze ogólne równanie funkcji własnej (ogólne równanie postaci drgań własnych):

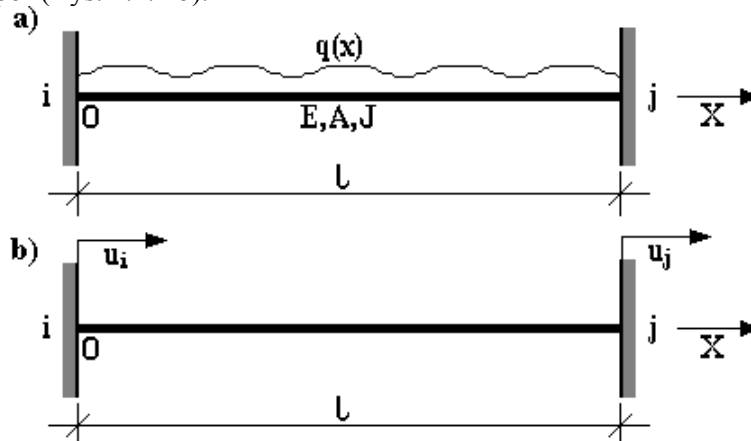
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1.1.25)$$

## 1.2. Wzory transformacyjne dla prętów pryzmatycznych o ciągłym rozkładzie masy, drgających podłużnie.

Zastanówmy się jak będą wyglądać siły normalne w przecie drgającym podłużnie i stwórzmy dla niego wzory transformacyjne metody przemieszczeń (1.2.1).

$$N(x) = \begin{cases} N(0) = N_{ij} \\ N(l) = N_{ji} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Założmy, że rozpatrywany przez nas pręt obciążony jest siłami bezwładności tzn. stałym obciążeniem integralnie związanym z masą układu (Rys. 1.2.1 a). Na tak drgający pręt (z częstością kołową drgań własnych  $\omega$ ) narzucimy teraz w sposób stały, warunki wymuszenia kinematycznego tzn. poziome przemieszczenia podpór (Rys. 1.2.1 b).



Rys. 1.2.1 Pręt obustronnie utwierdzony: a) obciążony siłami bezwładności b) obciążony siłami bezwładności, ale dodatkowo z wymuszonymi poziomymi przemieszczeniami podpór

W celu rozwiązania tego problemu posłużymy się wcześniej już uzyskanym rozwiązaniem ogólnym (całą ogólną) równania ruchu (równania falowego)

(1.1.16) nieograniczonego pręta o liniowym rozkładzie masy, gdy ruch ten jest skutkiem działania podłużnych drgań własnych, a konkretnie 2<sup>o</sup> wyrażeniem tego równania (1.2.2).

$$2^o \quad U(x) = A \cdot \sin k x + B \cdot \cos k x \quad (1.2.2)$$

Teraz analogicznie jak wcześniej (1.1.19) skorzystajmy z kinematycznych warunków brzegowych, tzn. wykorzystajmy fakt, że w każdej chwili czasu wystąpią przemieszczenia poziome podpór pręta (1.2.3) a więc warunki brzegowe są niejednorodne.

$$I^o \quad U(0) = u_i \quad II^o \quad U(l) = u_j \quad (1.2.3)$$

Po uwzględnieniu powyższych warunków (1.2.3) w wyrażeniu 2<sup>o</sup> całki ogólnej (1.2.2) otrzymamy:

$$I^o \quad U(0) = A \sin k \cdot 0 + B \cos k \cdot 0 = u_i \Rightarrow B = u_i$$

$$II^o \quad U(l) = A \sin k \cdot l + B \cos k \cdot l = u_j \Rightarrow A = \frac{u_j}{\sin k \cdot l} - \frac{u_i \cdot \cos k \cdot l}{\sin k \cdot l} \quad (1.2.4)$$

Po podstawieniu stałych otrzymanych powyżej (1.2.4) do równania 2<sup>o</sup> (1.2.2) otrzymamy następujące rozwiązanie szczególne:

$$U(x) = \left( \frac{u_j}{\sin k \cdot l} - \frac{u_i \cdot \cos k \cdot l}{\sin k \cdot l} \right) \cdot \sin k x + u_i \cos k x \quad (1.2.5)$$

Aby dostać siły normalne skorzystajmy ze znanej nam już (1.1.8) następującej zależności:

$$N(x) = A \cdot E \cdot dU(x) \quad (1.2.6)$$

Żeby rozwiązać powyższe równanie potrzebujemy znaleźć U'(x), stąd zróżnicowane rozwiązanie szczególne przyjmie postać:

$$dU(x) = k \cdot \left( \frac{u_j}{\sin k \cdot l} - \frac{u_i \cdot \cos k \cdot l}{\sin k \cdot l} \right) \cdot \cos k x - k \cdot u_i \sin k x \quad (1.2.7)$$

a po podstawieniu powyższego rozwiązania (1.2.7) do równania (1.2.6) i uwzględnieniu znanych nam już (1.1.10 i 1.1.24) następujących zależności:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{i} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{stad:} \quad k^2 = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{E} = \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot A}{E \cdot A} = \frac{\omega^2 \mu}{EA} \quad (1.2.8)$$

otrzymamy:

$$N(x) = \frac{EA \cdot \eta}{l} \cdot \left[ \left( \frac{u_j}{\sin \eta} - \frac{u_i \cdot \cos \eta}{\sin \eta} \right) \cdot \cos k \cdot x - u_i \cdot \sin k \cdot x \right] \quad (1.2.9)$$

gdzie:

-  $\eta$  - to parametr o następującej interpretacji:

$$\eta = l \cdot \gamma = l \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \omega^2}{EA}} \quad \text{bo:} \quad \gamma^2 = \frac{\mu \cdot \omega^2}{EA} \quad (1.2.10)$$

-  $\mu$  - to liniowa gęstość materiału równa:

$$\mu = A \cdot \rho \quad (1.2.11)$$

Na podstawie wzoru (1.2.9) otrzymamy poszukiwane przesłowe przywęzłowe siły normalne:

$$N(x) = \begin{cases} N(0) = N_{ij} = \frac{EA}{l} \eta \left[ \left( \frac{u_j}{\sin \eta} - \frac{u_i \cos \eta}{\sin \eta} \right) \cos k \cdot 0 - u_i \sin k \cdot 0 \right] \\ N(l) = N_{ji} = \frac{EA}{l} \eta \left[ \left( \frac{u_j}{\sin \eta} - \frac{u_i \cos \eta}{\sin \eta} \right) \cos k \cdot l - u_i \sin k \cdot l \right] \end{cases} \quad (1.2.12)$$

stad:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \frac{EA}{l} \eta \cdot [u_j \cdot \operatorname{cosec} \eta - u_i \cdot \operatorname{ctg} \eta] \\ N_{ji} &= \frac{EA}{l} \eta \cdot [u_j \cdot \operatorname{ctg} \eta - u_i \cdot \operatorname{cosec} \eta] \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

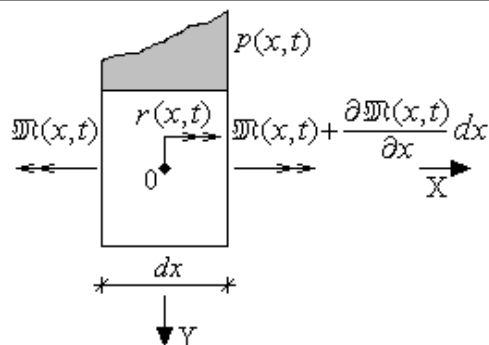
### 1.3. Równanie ruchu pręta, gdy ruch ten jest skutkiem działania dowolnych drgań skrętnych.

a) założenia:

- drgania harmoniczne (okresowe, periodyczne, czyli powtarzające się w regularnych odstępach czasowych)
- układ idealny (tzn. brak jakiegokolwiek tłumienia ruchu)
- małe przemieszczenia pręta (małe ruchy)
- ciągły, liniowy rozkład masy w pręcie
- pomijamy skrócenia bądź wydłużenia pręta
- przekrój pręta nie ulega odkształceniom postaciowym tzn. w procesie deformacji zachowuje swój pierwotny kształt

b) wyprowadzenie

Wytnijmy myślowo element nieskończenie długiego pręta (Rys. 1.3.1).



Rys. 1.3.1 Wycięty myślowo element rozpatrywanego pręta wraz z działającymi na niego siłami

Z sumy momentów względem środka ciężkości 0 (Rys. 1.3.1) możemy zapisać:

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow -M(x,t) + M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t)dx + r(x,t)dx = 0$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t)dx + r(x,t)dx = 0 \quad (1.3.1)$$

gdzie:

-  $r(x,t)$  – siła tłumienia (oporu) ruchu wynikająca z faktu drgania pręta (siła bezwładności) równa:

$$r(x,t) = -\mu \cdot J_0 \cdot \ddot{\varphi}(x) = -\mu \cdot J_0 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.3.2)$$

gdzie:

-  $J_0$  – biegunowy moment bezwładności dla przekroju kołowego:

$$J_0 = J_x + J_y \quad (1.3.3)$$

-  $\varphi(x,t)$  – kąt skręcania

-  $\mu$  – gęstość masy rozpatrywanego elementu równa stosunkowi masy elementu do jego pola:

$$\mu = \frac{dm}{A} = \frac{dV \cdot \rho}{A} = \frac{A \cdot dx \cdot \rho}{A} = dx \cdot \rho \quad (1.3.4)$$

Znak minus we wzorze (1.3.2), wynika z faktu przeciwnego zwrotu siły bezwładności do siły powodującej ruch.

Po uwzględnieniu we wzorze (1.3.1) zależności (1.3.2) i (1.3.4) otrzymamy:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + p(x,t) dx - J_0 \cdot dx \cdot \rho \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad /: dx$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + p(x,t) - J_0 \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.5)$$

Na podstawie definicji momentu skręcającego oraz po uwzględnieniu faktu, że rozpatrywany pręt jest jednorodny i pryzmatyczny, możemy zapisać:

$$M(x,t) = G \cdot J_s \cdot \gamma(x,t) \quad (1.3.6)$$

gdzie:

-  $\gamma$  – jednostkowy kąt skręcania równy:

$$\gamma(x,t) = \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad (1.3.7)$$

-  $J_s$  – moment bezwładności na skręcanie np. równy:

- dla pręta o przekroju kołowym lub pierścieniowym:

$$J_s = J_o \quad (1.3.8)$$

- dla pręta o przekroju w kształcie trójkąta równobocznego o boku 2a:

$$J_s = \frac{a^4 \cdot \sqrt{3}}{5} \quad (1.3.9)$$

- dla pręta o przekroju w kształcie prostokąta o bokach b i h:

$$J_s \approx \frac{1}{3} b^4 \left( \frac{h}{b} - 0,63 + \frac{0,052}{\left(\frac{h}{b}\right)^4} \right) \quad (1.3.10)$$

-  $G$  – moduł Kirchhoffa (ścianania, odkształcenia postaciowego) równy:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.3.11)$$

Po uwzględnieniu wzoru (1.3.7) we wzorze (1.3.6), oraz po zróżniczkowaniu otrzymanego w ten sposób wyrażenia względem x otrzymamy:

$$M(x,t) = G \cdot J_s \cdot \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = G \cdot J_s \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.3.12)$$

Następnie po podstawieniu powyższego wyrażenia (1.3.12) do wzoru (1.3.5) otrzymamy następujące równanie:

$$G \cdot J_s \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - J_m \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1.3.13)$$

gdzie:

-  $J_m$  – biegunowy moment masy, równy:

$$J_m = J_0 \cdot \rho \quad (1.3.14)$$

Powyższe równanie (1.3.13) to równanie (różniczkowe) ruchu (tzw. równanie falowe) nieograniczonego pręta o liniowym rozkładzie masy, gdy ruch ten jest skutkiem działania dowolnych, wymuszonych drgań skrętnych.

Gdy mamy do czynienia z drganiami własnymi (bez żadnych wymuszeń) wzór (1.3.13) przyjmie następującą postać:

$$p(x,t)=0 \Rightarrow G \cdot J_s \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - J_m \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.15)$$

Zauważmy, że jeżeli mamy do czynienia z prętem o przekroju kołowym lub pierścieniowym ( $J_s = J_0$ ), to równanie falowe drgań własnych (1.3.15) przyjmie postać analogiczną jak dla drgań podłużnych (1.1.9):

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3.16)$$

ale o innej interpretacji stałej  $c$ :

$$c^2 = \frac{G}{\rho} \quad (1.3.17)$$

c) rozwiązanie

Szukamy ogólnego rozwiązania równania różniczkowego (całki ogólnej), dla wzoru (1.3.15).

Rozwiążmy te równanie analogicznie jak dla drgań podłużnych metodą rozdzielania zmiennych. Załóżmy, że istnieje taka funkcja  $\varphi(x,t)$ , która składa się z iloczynu dwóch funkcji, zależnych tylko i wyłącznie od jej pojedynczych zmiennych tzn. od czasu „ $t$ ” (funkcja czasu -  $T(t)$ ) oraz od przestrzeni „ $x$ ” (funkcja przestrzeni -  $\Phi(x)$ ).

$$\varphi(x, t) = T(t) \cdot \Phi(x)$$

$$G \cdot J_s \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} \cdot T(t) - J_m \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \cdot \Phi(x) = 0 \quad /: [T(t) \cdot \Phi(x) \cdot J_m]$$

$$\frac{G \cdot J_s \cdot \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2}}{J_m \cdot \Phi(x)} = \frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} \quad (1.3.18)$$

Aby lewa strona tego równania (funkcja przestrzeni) była równa prawej (funkcji czasu), w danym punkcie czasoprzestrzeni, funkcje te muszą osiągnąć w tym punkcie jakąś stałą wartość (skalar). Wartość tą oznaczymy przez  $\omega^2$ .

$$\frac{G \cdot J_s \cdot \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2}}{J_m \cdot \Phi(x)} = \frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = \omega^2 \quad (1.3.19)$$

W ten sposób dostaliśmy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - \omega^2 \cdot T(t) = 0 & \Rightarrow 1^0 \\ \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} - \beta^2 \cdot \Phi(x) = 0 & \Rightarrow 2^0 \end{cases} \quad (1.3.20)$$

gdzie:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \cdot J_m}{G \cdot J_s} \quad (1.3.21)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań (1.3.20) dostaniemy:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad T(t) &= C_1 \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t \\ 2^0 \quad \Phi(x) &= A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

stąd rozwiązanie ogólne (całka ogólna) przyjmie postać:

$$\varphi(x, t) = T(t) \cdot \Phi(x) = (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \cdot (A \sin \beta x + B \cos \beta x) \quad (1.3.23)$$

Na podstawie powyższego ogólnego rozwiązania równania różniczkowego (całki ogólnej) wzór (1.3.23), postępując analogicznie jak wcześniej przy drganiach podłużnych, otrzymamy rozwiązanie szczególne.