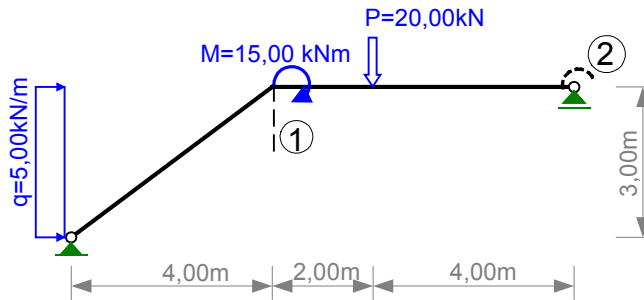


## OBLICZENIE PRZEMIESZCZEŃ W RAMIE PŁASKIEJ

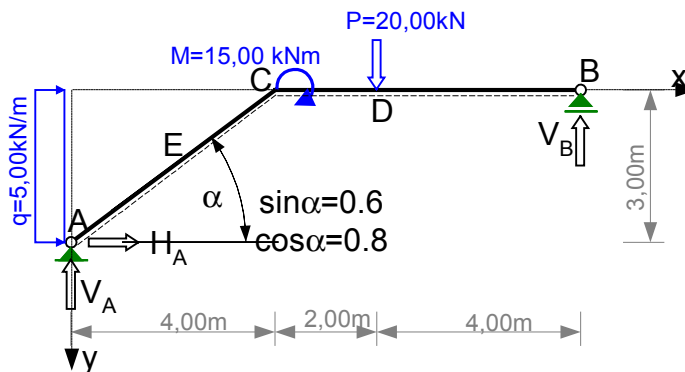
Dana jest rama jak na rysunku.



Sporządzić wykresy sił przekrojowych od obciążenia danego oraz od obciążeń jednostkowych przyłożonych w miejscach szukanych przemieszczeń. Zaprojektować wstępnie przekroje prętów. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia. W obliczeniach potraktować dane wartości obciążenia jako charakterystyczne, przyjąć średni współczynnik obciążenia  $\gamma_f = 1.2$ , wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d = 215 \text{ MPa}$  i współczynnik sprężystości podłużnej  $E = 205 \text{ GPa}$ .

### 1 ROZWIĄZANIE RAMY OD DANEGO OBCIĄŻENIA $F = (M, P, Q)$

Liniami przerywanymi wzdłuż osi prętów wyróżnione włókna do znakowania momentów zginających.



#### Wyznaczenie reakcji podpór.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -V_B \cdot 10\text{m} + P \cdot 6\text{m} + M + q \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} / 2 = 0 & \Rightarrow \\ & -V_B \cdot 10\text{m} + 20\text{kN} \cdot 6\text{m} + 15\text{kNm} + 5\text{kN/m} \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} / 2 = 0 & \Rightarrow V_B = 15.75\text{kN}, \\ \sum Y &= -V_A - V_B + P = 0 & \Rightarrow -V_A - 15.75\text{kN} + 20\text{kN} = 0 & \Rightarrow V_A = 4.25\text{kN}, \\ \sum X &= H_A + q \cdot 3\text{m} = 0 & \Rightarrow H_A + 5\text{kN/m} \cdot 3\text{m} = 0 & \Rightarrow H_A = -15.00\text{kN}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kontrola} \quad \sum M_B &= -H_A \cdot 3\text{m} + V_A \cdot 10\text{m} - P \cdot 4\text{m} + M - q \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} / 2 = \\ &= (15 \cdot 3 + 4.25 \cdot 10 - 20 \cdot 4 + 15 - 5 \cdot 3 \cdot 3 / 2) \text{kNm} = 0 \end{aligned}$$

#### Obliczenie wartości rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych.

$$\begin{aligned} M_A &= 0, \\ M_E &= V_A \cdot 2\text{m} - H_A \cdot 1.5\text{m} - q \cdot 1.5\text{m} \cdot 1.5\text{m} / 2 = \\ &= 4.25\text{kN} \cdot 2\text{m} + 15\text{kN} \cdot 1.5\text{m} - 5\text{kN/m} \cdot 1.5\text{m} \cdot 1.5\text{m} / 2 = 25.375\text{kNm}, \\ M_{C,AC} &= V_A \cdot 4\text{m} - H_A \cdot 3\text{m} - q \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} / 2 = 4.25 \cdot 4\text{m} + 15\text{kN} \cdot 3\text{m} - 5\text{kN/m} \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} / 2 = 39.50\text{kNm}, \\ M_{C,CD} &= M_{C,AC} + M = 39.5\text{kNm} + 15\text{kNm} = 54.50\text{kNm}, \\ M_D &= V_B \cdot 4\text{m} = 15.75\text{kN} \cdot 4\text{m} = 63.00\text{kNm}, & M_B &= 0, \\ V_{A,AC} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6) \text{kN} = 12.40\text{kN}, \\ N_{A,AC} &= -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8) \text{kN} = 9.45\text{kN}, \\ V_{C,AC} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha - q \cdot 3\text{m} \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6 - 5 \cdot 3 \cdot 0.6) \text{kN} = 3.40\text{kN}, \end{aligned}$$

$$N_{C,AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8 - 5 \cdot 3 \cdot 0.8)kN = -2.55kN,$$

$$V_{CD} = P - V_B = 20kN - 15.75kN = 4.25kN, \quad V_{DB} = -V_B = -15.75kN, \quad N_{CB} = 0.$$

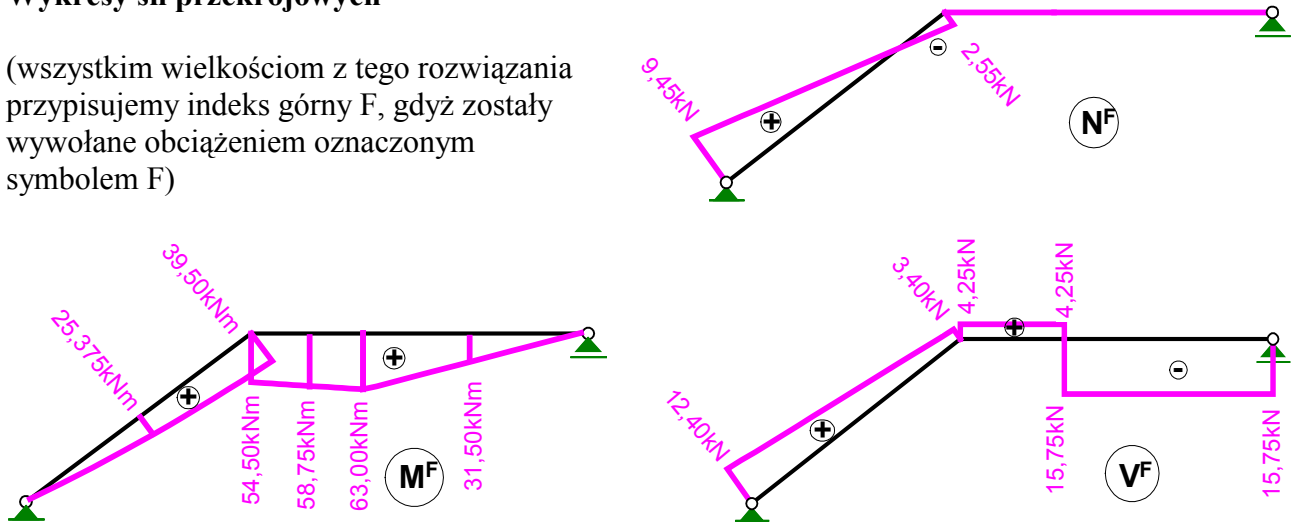
Rzędne środkowe momentów zginających dla przedziału CD i DB obliczono jako średnie arytmetyczne z wartości brzegowych.

$$M_{S,CD} = (M_{C,CD} + M_D) / 2 = (54.5 + 63)kNm = 58.75kNm,$$

$$M_{S,DB} = (M_D + M_B) / 2 = (63 + 0)kNm = 31.50kNm$$

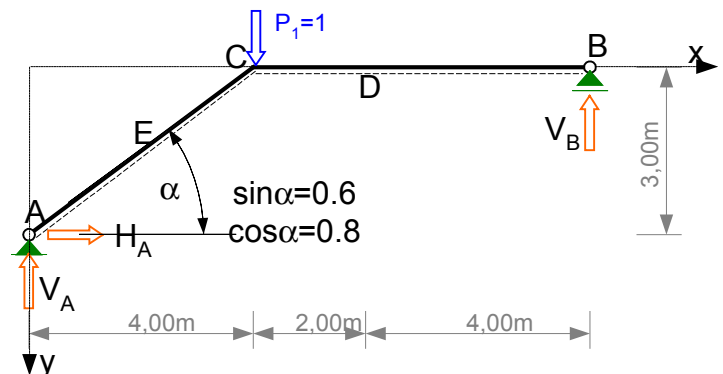
## Wykresy sił przekrojowych

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny F, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym symbolem F)



## 2. Rozwiązanie ramy od obciążenia $P_1 = 1$

W celu wyznaczenia przesunięcia (w temacie kierunek nr 1 zaznaczony linią przerywaną) niezbędne jest rozwiązanie ramy od obciążenia siłą jednostkową przyłożoną w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia.



### Wyznaczenie reakcji podpór.

$$\sum M_A = -V_B \cdot 10m + 1 \cdot 4m = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 0.40,$$

$$\sum Y = -V_A - V_B + P_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 0.60,$$

$$\sum X = H_A = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0.$$

**Kontrola**  $\sum M_B = -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m - P_1 \cdot 6m = (-0 \cdot 3 + 0.6 \cdot 10 - 1 \cdot 6)m = 0$

### Obliczenie wartości rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych.

$$M_A = 0, \quad M_C = V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = 2.40m,$$

$$M_D = V_B \cdot 4m = 1.60m, \quad M_B = 0,$$

$$V_{AC} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = 0.48, \quad N_{AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = -0.36,$$

$$V_{CB} = -V_B = -0.40, \quad N_{CB} = 0.$$

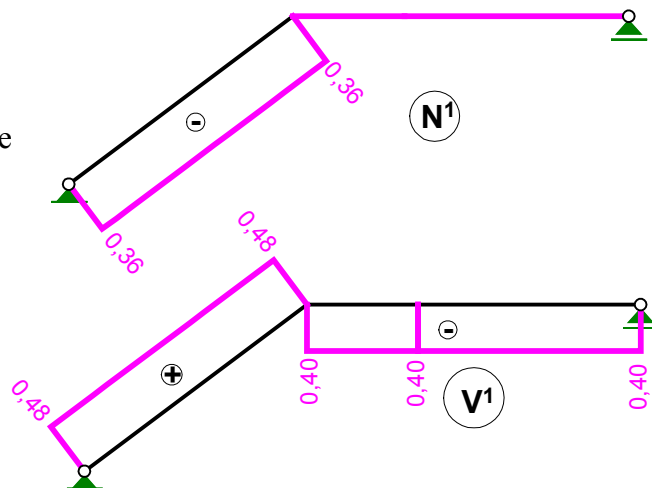
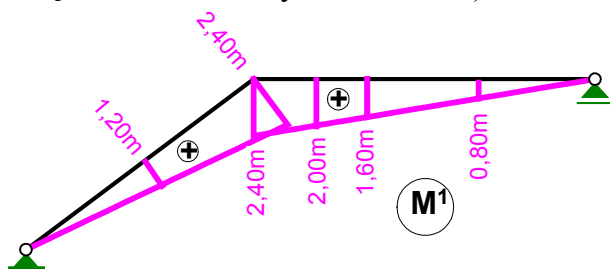
$$M_E = M_{S,AC} = (M_A + M_C) / 2 = (0 + 2.4) / 2 \cdot m = 1.20m,$$

$$M_{S,CD} = (M_C + M_D) / 2 = (2.4 + 1.6) / 2 \cdot m = 2.00m,$$

$$M_{S,DB} = (M_D + M_B) / 2 = (1.6 + 0) / 2 \cdot m = 0.80m$$

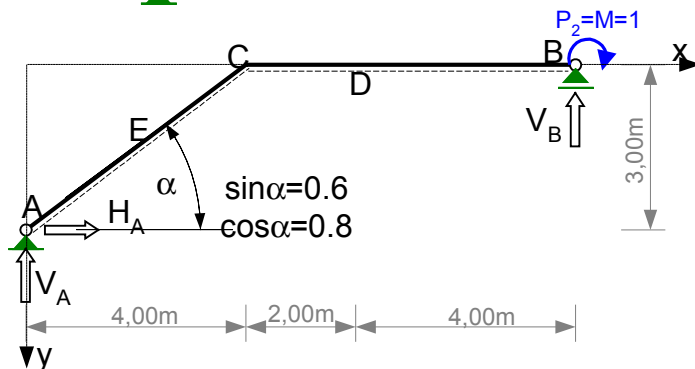
## Wykresy sił przekrojowych

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny 1, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym numerem 1)



### 3. Rozwiązanie ramy od obciążenia $P_2 = 1$

W celu wyznaczenia kąta obrotu (w temacie kierunku nr 2 zaznaczony łukiem z linii przerywanej) niezbędne jest rozwiązanie ramy od obciążenia jednostkowym momentem przyłożonym w miejscu szukanego kąta obrotu



#### Wyznaczenie reakcji podpór.

$$\sum M_A = -V_B \cdot 10m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 0.10/m,$$

$$\sum Y = -V_A - V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_A = -0.10/m,$$

$$\sum X = H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0.$$

#### Kontrola

$$\sum M_B = -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m + P_2 = -0 \cdot 3 - 0.1 \cdot 10 + 1 = 0$$

#### Obliczenie wartości rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych.

$$M_A = 0,$$

$$M_C = V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = -0.40,$$

$$M_D = V_B \cdot 4m - 1 = -0.60,$$

$$M_B = 0,$$

$$V_{AC} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = -0.08/m,$$

$$N_{AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = 0.06/m,$$

$$V_{CB} = -V_B = -0.10/m,$$

$$N_{CB} = 0.$$

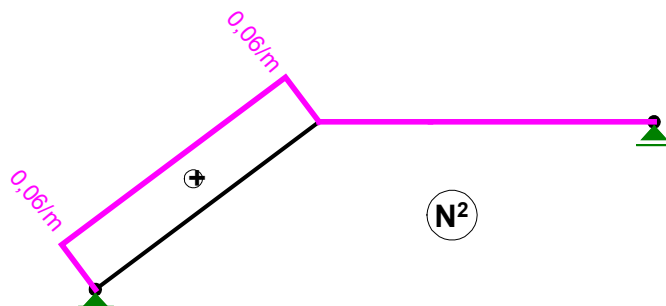
$$M_E = M_{S,AC} = (M_A + M_C)/2 = (0 - 0.4)/2 = -0.20,$$

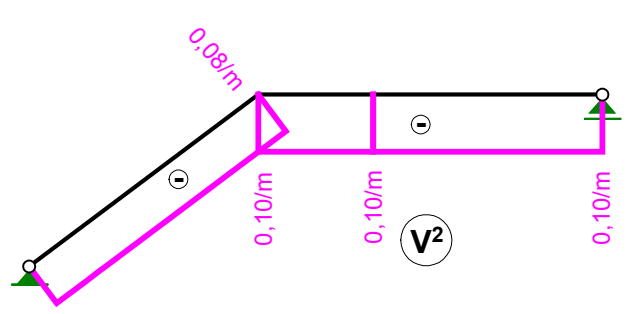
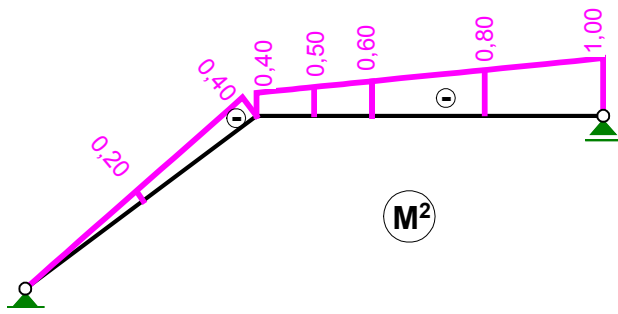
$$M_{S,CD} = (M_C + M_D)/2 = (-0.4 - 0.6)/2 = -0.50,$$

$$M_{S,DB} = (M_D + M_B)/2 = (-0.6 - 0)/2 = -0.30$$

## Wykresy sił przekrojowych

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny 2, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym numerem 2)





#### 4. Projektowanie wstępne przekrojów prętów

**Pręt AC** Potrzebny wskaźnik wytrzymałości na zginanie

$$W \geq \frac{\max|M| \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{39.5 \text{ kNm} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2} = 0.0002205 \text{ m}^3 = 202.5 \text{ cm}^3$$

$$\text{Przyjęto I 220} \Rightarrow W = 278.18 \text{ cm}^3, \quad I = 3060 \text{ cm}^4, \quad A = 39.6 \text{ cm}^2$$

$$EI_{AC} = 205000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.00003060 \text{ m}^4 = 6273 \text{ kNm}^2$$

**Pręt CB**  $W \geq \frac{\max|M| \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{63 \text{ kNm} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2} = 0.0003516 \text{ m}^3 = 351.6 \text{ cm}^3$

$$\text{Przyjęto I 240} \Rightarrow W = 354 \text{ cm}^3, \quad I = 4250 \text{ cm}^4, \quad A = 46.1 \text{ cm}^2$$

$$EI_{CB} = 205000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.00004250 \text{ m}^4 = 8712.5 \text{ kNm}^2$$

#### 5. Obliczenie szukanych przemieszczeń.

Przemieszczenia obliczono na podstawie wzorów:  $\Delta_{1F} = \int \frac{M^1 \cdot M^F}{EI} dx$ ,  $\Delta_{2F} = \int \frac{M^2 \cdot M^F}{EI} dx$

Do obliczenia powyższych całek zastosowano wzór Simpsona. W tym celu (ze względu na charakter wykresów momentów zginających) przedstawiono je w postaci sum 3 całek odpowiadających poszczególnym przedziałom, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie wzoru Simpsona.

**Szukane przesunięcie wynosi:**

$$\Delta_{1F} = \int \frac{M^1 \cdot M^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} M^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} M^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} M^1 \cdot M^F \cdot dx$$

$$\Delta_{1F} = \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot 6273 \text{ kNm}^2} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 25.375 \text{ kNm} \cdot 1.2 \text{ m} + 39.5 \text{ kNm} \cdot 2.4 \text{ m}] +$$

$$+ \frac{2}{6 \cdot 8712.5} [54.5 \cdot 2.4 + 4 \cdot 58.75 \cdot 2 + 63 \cdot 1.6] \cdot \text{m} +$$

$$+ \frac{4}{6 \cdot 8712.5} [63 \cdot 1.6 + 4 \cdot 31.5 \cdot 0.8 + 0 \cdot 0] \cdot \text{m} = 0.071 \text{ m} = 7.1 \text{ cm}$$

**Szukany kąt obrotu wynosi:**

$$\Delta_{2F} = \int \frac{M^2 \cdot M^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} M^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} M^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} M^2 \cdot M^F \cdot dx$$

$$\Delta_{2F} = \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot 6273 \text{ kNm}^2} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 25.375 \text{ kNm} \cdot (-0.2) + 39.5 \text{ kNm} \cdot (-0.4)] +$$

$$+ \frac{2}{6 \cdot 8712.5} [54.5 \cdot (-0.4) + 4 \cdot 58.75 \cdot (-0.5) + 63 \cdot (-0.6)] +$$

$$+ \frac{4}{6 \cdot 8712.5} [63 \cdot (-0.6) + 4 \cdot 31.5 \cdot (-0.8) + 0 \cdot (-1)] = -0.2218 = -0.2218 \text{ rad} = -0.2218 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -1.27^\circ$$