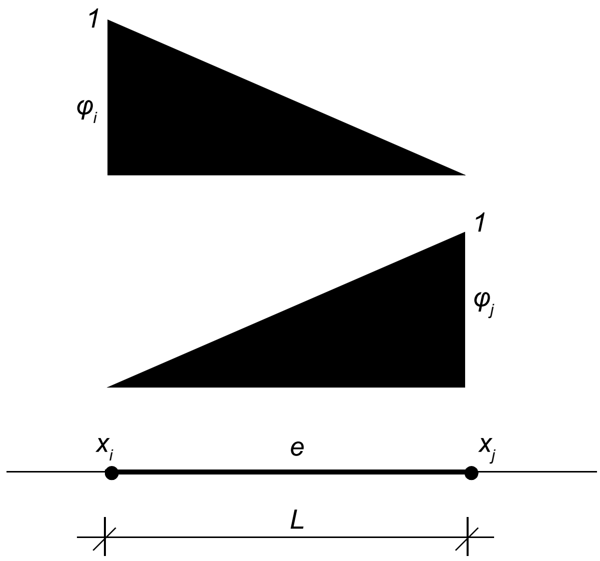
8. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną rozwiązywania równań różniczkowych. W porównaniu z innymi metodami numerycznymi jest ona tym bardziej skuteczna, gdy obszar analizy ma złożony kształt lub gdy składa się z materiałów o różnych własnościach.

W MES obszar analizy dzieli się na wiele podobszarów o prostym kształcie (np. trójkątnym) zwanych elementami skończonymi. Funkcje aproksymuje się lokalnie w każdym elemencie skończonym za pomocą funkcji ciągłych określonych jednoznaczne przez ich wartości w pewnych punktach zwanych węzłami, leżących wewnątrz elementu lub na jego brzegu.

Dla elementu liniowego zakładamy *(Rys.8.1)*, że funkcja interpolująca wielkości wewnątrz elementu jest liniowa, np.:



Rys.8.1 Interpretacja graficzna funkcji aproksymującej

$$\varphi^{(x)}{}_e = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\varphi} \varphi^e{}_i + \frac{x}{L}\varphi^e{}_j \tag{8.1}$$

$$\varphi_e^{(x)} = N_1(x)\varphi^e{}_i + N_2(x)\varphi^e{}_j$$

$$\varphi_e = [N_1\, N_2]\begin{Bmatrix}\varphi^e{}_i \\ \varphi^e{}_j\end{Bmatrix} \tag{8.2}$$

$$\varphi_e = \underline{N}^T \cdot \underline{\varphi^e{}_i}$$

gdzie:

$\underline{N}$ – macierz funkcji kształtu N_1, N_2

e – indeks elementu skończonego

i,j – numery węzłów

$\varphi^e{}_i$ - wartośc funkcji w węźle *i*

Rozwiążemy ponownie nasze równanie różniczkowe metodą Galerkina, przyjmując teraz obszar całkowania jako obszar jednego elementu *e*:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda^2\phi = 0 \tag{8.3}$$

$$\int N_i(x) \cdot R(x)dx = 0 \quad \text{i}=1,2.... \tag{8.4}$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot \left(\frac{d^2\varphi_e}{dx^2} + \lambda^2\varphi_e \right) dx = 0 \tag{8.5}$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot \left(\frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} \cdot \varphi^e{}_j + \lambda^2 \cdot N_j(x) \cdot \varphi^e{}_j \right) dx = 0 \tag{8.6}$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} \cdot \varphi^e{}_j dx + \lambda^2 \int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot N_j(x) \cdot \varphi^e{}_j dx = 0 \tag{8.7}$$

Całkujemy przez części pierwszy człon wyrażenia, aby obniżyć rząd całkowania:

$$\underbrace{-\int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} \cdot \varphi_j{}^e dx}_{I} + \underbrace{\left[N_i(x) \cdot \frac{d\phi_e}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} \cdot \varphi_j{}^e}_{II} + \underbrace{\lambda^2 \int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot N_j(x) \cdot \varphi_j{}^e dx}_{III} = 0 \tag{8.8}$$

Przypomnijmy, że:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) &= \frac{x}{L} \end{aligned} \tag{8.9}$$

Rozpatrujemy człon *I* wzoru (8.8)

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^L \frac{dN_i(x)}{dx}\cdot\frac{dN_j(x)}{dx}dx = -\int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \\
&= -L\begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

Rozpatrujemy człon *III* wzoru (8.8)

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2\int_0^L N_i(x)\cdot N_j dx = \lambda^2\int_0^L N_i(x)\cdot N_j(x)dx = \lambda^2\int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} dx = \\
&= \lambda^2\int_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \lambda^2\int_0^L \begin{bmatrix} 1-2\frac{x}{L}+\frac{x^2}{L^2} & \frac{x}{L}-\frac{x^2}{L^2} \\ \frac{x}{L}-\frac{x^2}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dx = \\
&= \lambda^2\begin{bmatrix} x-\frac{2x^2}{2L}+\frac{x^3}{3L^2} & \frac{x^2}{2L}-\frac{x^3}{3L^2} \\ \frac{x^2}{2L}-\frac{x^3}{3L^2} & \frac{x^3}{3L^2} \end{bmatrix}_0^L = \lambda^2\begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\lambda^2\cdot L\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Macierz charakterystyczna elementu ma zatem postać:

$$
\underline{k} = -\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\cdot\lambda^2\cdot L\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\tag{8.12}
$$

Rozpatrujemy człon *II* wzoru (.8)

$$
\left[N_i(x)\cdot\frac{d\phi_e}{dx}\right]_0^L = N_i(L)\cdot\frac{d\phi}{dx}\Big/_L - N_i(0)\cdot\frac{d\phi}{dx}\Big/_0
\tag{8.13}
$$

Ponieważ:

$$
\begin{aligned}
N_1(L) &= 0 \qquad & N_2(L) &= 1 \\
N_1(0) &= 1 \qquad & N_2(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

otrzymujemy:

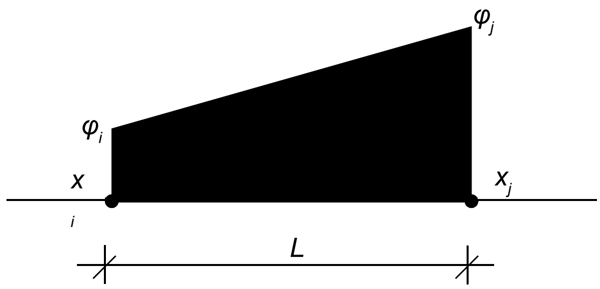
$$\underline{f} = \begin{bmatrix} N_1(L)\cdot \frac{d\phi}{dx}\Big/_L - N_1(0)\cdot \frac{d\phi}{dx}\Big/_0 \\ N_2(L)\cdot \frac{d\phi}{dx}\Big/_L - N_2(0)\cdot \frac{d\phi}{dx}\Big/_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\phi}{dx}\Big/_0 \\ \frac{d\phi}{dx}\Big/_L \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

Otrzymujemy w końcu równanie macierzowe w postaci:

$$\underline{K}\cdot \underline{\varphi}^e = \underline{f} \tag{8.16}$$

lub

$$\left(\frac{1}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\cdot\lambda^2\cdot L^e\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} \varphi^e{}_1 \\ \varphi^e{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dx}\Big/_0 \\ -\frac{d\phi}{dx}\Big/_L \end{bmatrix} \tag{8.17}$$



Rys. 8.2 Pojedynczy element opisany liniową funkcją aproksymującą

Agregacja macierzy charakterystycznej ***K*** polega na sumowaniu wartości odpowiednich elementów macierzy K_{ij} jak we wzorze (8.18), w celu uwzględnienia udziału wszystkich elementów.

Podzielmy nasz obszar <1,3> na trzy elementy (*Rys 8.3).*

Rys. 8.3 Podział na trzy elementy

Oznaczmy przez "+" elementy macierzy k_1 (dla elementu 1).

Oznaczmy przez "-" elementy macierzy k_2 (dla elementu 2).

Oznaczmy przez "•" elementy macierzy k_3 (dla elementu 3).

Agregację macierzy K możemy przedstawić graficznie jako:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{array} &
\begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ + & \pm & - & 0 \\ 0 & - & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \left. \dfrac{d\phi}{dx} \right/_1 \\ 0 \\ 0 \\ -\left. \dfrac{d\phi}{dx} \right/_4 \end{bmatrix}
\tag{8.18}
$$

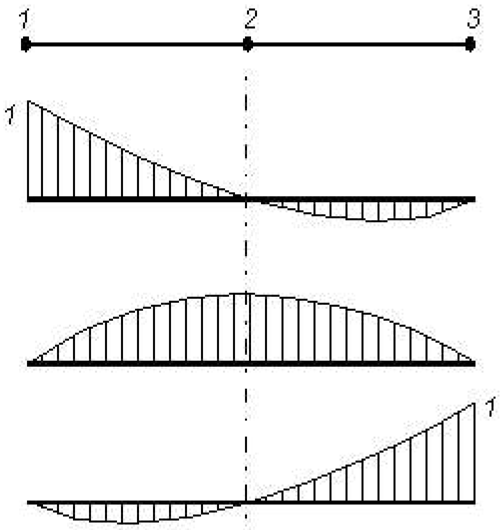
Przy rozwiązywaniu otrzymanego układu równań należy pamiętać o wprowadzeniu warunków brzegowych. Zabieg ten polega na zmodyfikowaniu pierwszego i ostatniego równania układu równań. Trzeba wprowadzić wartości podane na brzegach w kolumnie niewiadomych, a jako niewiadome podstawić pochodne. Wiąże się to z wstawieniem wartości „*1*” w odpowiednich równaniach na przeklętej macierzy.

Funkcje kształtu mogą być również wyższego rzędu. Poniżej pokazano element z trzema węzłąmi o kwadratowej funkcji kształtu.

$$N_1 = \frac{1}{2}(-1+\xi)\xi$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(2-2\xi^2)\xi$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi$$



Rys 8.4 Kwadratowe funkcje kształtu

Do opisania tych funkcji kształtu, będących parabolami, wprowadziliśmy zmienną bezwymiarową ξ : $-1 \le \xi \le 1$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej nasze liniowe funkcje kształtu miałyby postać:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\
N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi)
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$