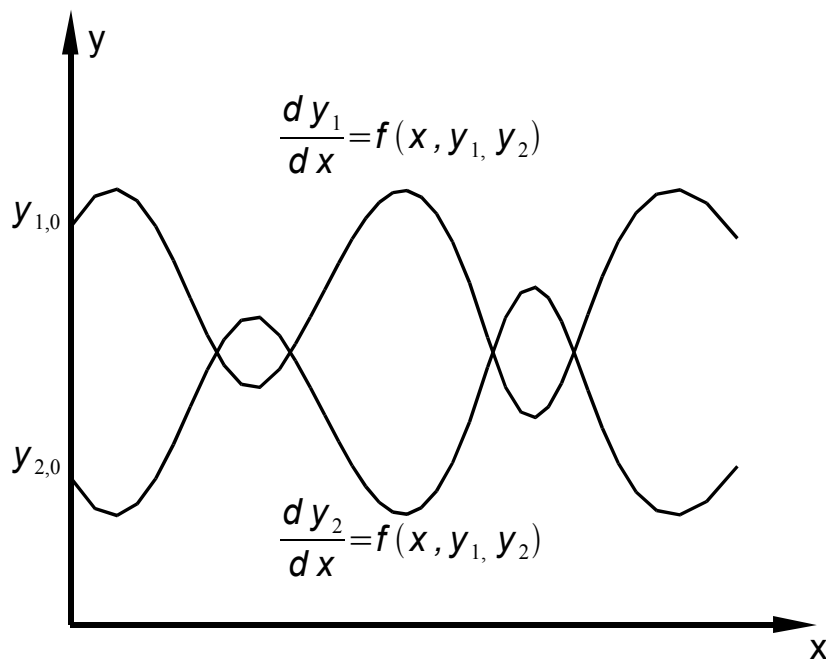




5. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE – ZAGADNIENIA BRZEGOWE

Zagadnienia początkowe (initial value problems) to zagadnienia związane ze stałymi całkowania, zadeklarowanymi na początku. Pozwalają uwarunkować zadanie, dostosować je do konkretnych sytuacji.

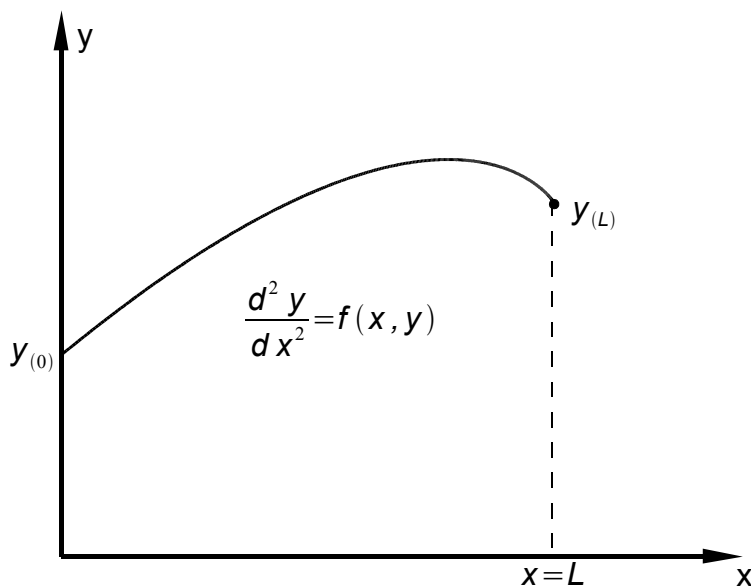
$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} = y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) & \quad y_{1,0} = y_1(0) \\ \frac{dy_2}{dx} = y'_2 = f_2(x, y_1, y_2) & \quad y_{2,0} = y_2(0) \end{aligned} \quad (5.1)$$



Rys.5.1 Przykład zadania z zagadnieniem brzegowym

Równania różniczkowe-zagadnienia brzegowe (boundary value problems), to zagadnienia w których stałe całkowania wyznacza się na podstawie warunków określanych nie na początku przedziału lecz najczęściej na jego końcach (brzegach). Np. Równania różniczkowe linii ugięcia belki:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y) \\ y_0 = y(0) \\ y_L = y(L) \end{aligned} \quad (5.2)$$

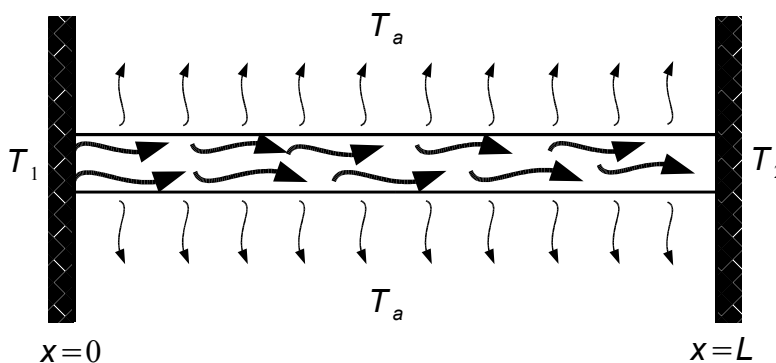


Rys.5.2 Zagadnienia brzegowe; warunek początkowy i końcowy

Przykład 5.1:

Równanie różniczkowe przewodnictwa ciepłego:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0 \quad (5.3)$$



Rys.5.3 Przykład przewodnictwa ciepła wzdłuż pręta.

Dane:

Pręt jest nie izolowany (ciepło rozchodzi się do otoczenia), x – zmienna kierunku, warunki brzegowe:

$$T(0) = T_1 = 40^\circ\text{C}$$

$$T(L) = T_2 = 200^\circ\text{C}$$

$T_a = 20^\circ\text{C}$ - temperatura otoczenia

$$L = 10\text{m}$$

$h = 0,01$ – stała charakteryzująca rozchodzenie się ciepła

Rozwiązanie dokładne:

$$T = 73,4523e^{0,1x} - 53,4523e^{-0,1x} + 20$$



Zastosujemy tzw. **metodę strzału** (shooting method).

Polega ona na przekształcaniu równania różniczkowego brzegowego, do równania różniczkowego początkowego. Równanie różniczkowe n-tego rzędu można sprowadzić zawsze do układu n równań I rzędu. Układ równań różniczkowych I rzędu będzie miał postać:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = h(T - T_a) \end{cases}$$

$$T(0) = T_1 = 40^\circ C$$

$$T(L) = T_2 = 200^\circ C$$

początkowo zakładamy, że $z(0) = 10$ - pierwszy strzał. Stosując np. metodę R-K IV rzędu o kroku $h=2$, otrzymujemy:

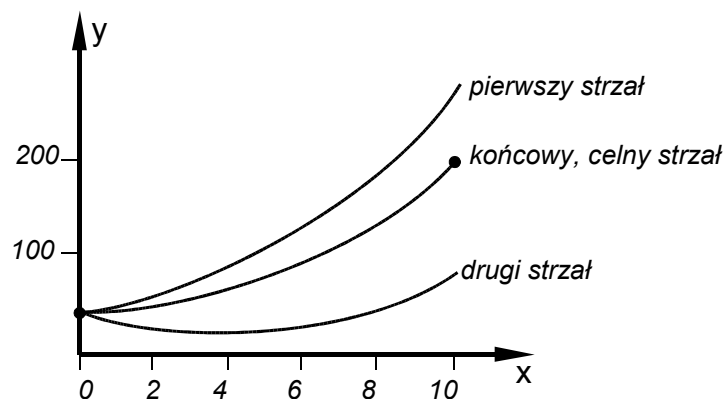
$$T(10) = 168,3797^\circ C$$

dla $z(0) = 20$ - drugi strzał, otrzymujemy:

$$T(10) = 285,8980^\circ C .$$

Zależność między dwoma strzałami jest liniowa więc dokonujemy liniowej interpolacji:

$$z(0) = 10 + \frac{20 - 10}{285,8980 - 168,3797} (200 - 168,3797) = 12,6907$$



Rys.5.4 Interpretacja graficzna shooting method

Jest to poprawny warunek początkowy. W ten sposób sprowadziliśmy zagadnienie brzegowe do zagadnienia początkowego. Dla zagadnień liniowych jest to bardzo efektywna metoda a dla zagadnień nieliniowych rzadko stosowana.

Metoda różnic skończonych (MRS)

Rozpatrzmy ponownie równanie różniczkowe przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0 \quad (5.3)$$

Zastępujemy drugą pochodną różnicą skończoną.



$$\frac{d^2T}{dx^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (5.4)$$

i po podstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - h(T_i - T_a) &= 0 \\ T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} - \Delta x^2 h T_i + \Delta x^2 h T_a &= 0 \\ T_{i+1} - T_i(2 + h \cdot \Delta x^2) + T_{i-1} &= -h \cdot \Delta x^2 \cdot T_a \end{aligned} \quad (5.5)$$

Równanie (5.5) zapisać możemy dla wszystkich punktów wewnętrznych.

Pręt dzielimy na 5 równych części:

$$L = 10m$$

$$\Delta x = 2$$

$$T_0 = 40^\circ C$$

$$T_5 = 200^\circ C$$

Układ równań różnicowych dla punktów wewnętrznych zapisujemy w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2,04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 200,8 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie:

$$T = [65,9698; 93,7785; 124,5382; 159,4795]$$

Zestawienie wyników otrzymanych przy zastosowaniu obu omawianych metod:

x	Rozwiązanie dokładne	Metoda 'shooting'	MRS
0	40	40	40
2	65.9518	65.9520	65.9698
4	93.7478	93.7481	93.7785
6	124.5036	124.5039	124.5382
8	159.4334	159.4538	159.4795
10	200	200	200