
**METODA PRZEMIESZCZEŃ DLA RAM PŁASKICH
ZŁOŻONYCH Z PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH
NIEODKSZTAŁCALNYCH PODŁUŻNIE ($EA=\infty$) I POSTACIOWO ($GA=\infty$)**

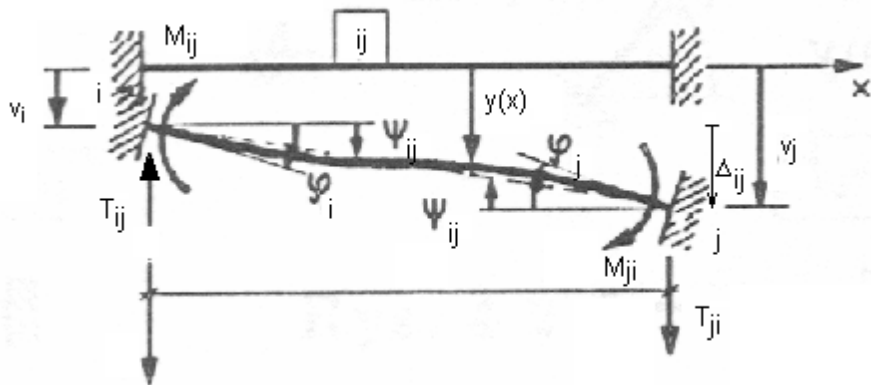
SPIS TREŚCI

1. WZORY TRANSFORMACYJNE WEDŁUG TEORII RZĘDU I-GO	2
2. TRANSFORMACJA PRZEMIESZCZEŃ GLOBALNYCH NA SIŁY BRZEGOWE	8
3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI	10
4. UKŁAD PODSTAWOWY	11
5. RÓWNANIA KANONICZNE W TEORII RZĘDU I-GO	12
6. RZECZYWISTE SIŁY PRZEKROJOWE	14

1. WZORY TRANSFORMACYJNE WEDŁUG TEORII RZĘDU I-go

Wzorami transformacyjnymi nazywamy zależności między siłami brzegowymi a przemieszczeniami brzegowymi pręta. Zanim przejdziemy do wyprowadzenia tych związków zauważmy, że każdy stan odkształcenia pręta może być rozłożony na (rys. 1):

1. przesunięcie równoległe,
2. wydłużenie lub skrócenie pręta,
3. odkształcenia wynikające ze zmiany odległości końców pręta w kierunku prostopadłym do jego osi (Δ_{ij}), obrotów węzłów (φ_{ij} , φ_{ji}) i działania obciążenia.



Rysunek 1

Każdy z tych trzech stanów może być rozpatrywany oddzielnie. Przesunięcie równoległe nie powoduje odkształceń a więc nie wywołuje także sił. Wydłużenie lub skrócenie (ΔL_{ij}) pręta związane jest tylko z siłami osiowymi. W przypadku stałej siły osiowej związek ten ma postać :

$$N_{ij} = N_{ji} = \frac{EA_{ij}}{L_{ij}} \cdot \Delta L_{ij} \quad (1.1)$$

gdzie : E - moduł sprężystości podłużnej materiału,

A_{ij} - pole poprzecznego przekroju pręta

Pozostaje zatem do rozpatrzenia stan odkształceń przedstawiony na rys. 1. Przyjmuje się tu statyczną umowę znakowania sił brzegowych (dodatnie są momenty prawoskrętne i siły tnące dające momenty prawoskrętne) oraz analogiczną umowę znakowania przemieszczeń (dodatnie są kąty obrotu prawoskrętne i wzajemne poprzeczne przesunięcia końców prętów ($\Delta_{ij} = \psi_{ij} \cdot L_{ij}$) odpowiadające dodatnim obrotom cięciw prętów ψ_{ij}).

Jak widać na rys. 1 moment zginający (umowa znakowania wytrzymałościowa) w przekroju pręta o współrzędnej "x" określony jest zależnością :

$$M(x) = M_{ij} + T_{ij} \cdot L_{ij} - N_{ij} \cdot y(x) + M(q,x) \quad (1.2)$$

gdzie : $M(q,x)$ - moment zginający od obciążenia zewnętrznego.

Powyższy związek uwzględnia, ujawniający się w wyniku odkształceń, wpływ stałej na całej długości pręta, siły osiowej ($N_{ij} = N_{ji}$) na momenty zginające i siły tnące co nazywane jest teorią rzędu 2-go.

Po podstawieniu zależności (1.2) do znanego równania różniczkowego osi odkształconej pręta o stałej sztywności (EJ_{ij})

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{M(x)}{EJ_{ij}} = 0 \quad (1.3)$$

i dwukrotnym zróżniczkowaniu równania względem "x" otrzymuje się równania różniczkowe osi odkształconej pręta według teorii rzędu 2-go:

$$\text{- dla pręta ściskanego } (N_{ij} = - |N_{ij}|) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\lambda_{ij}^2}{L_{ij}^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{EJ_{ij}} \quad (1.4)$$

$$\text{- dla pręta rozciąganego } (N_{ij} = |N_{ij}|) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\bar{\lambda}_{ij}^2}{L_{ij}^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{EJ_{ij}} \quad (1.5)$$

$$\text{gdzie : } \bar{\lambda}_{ij}^2 = \frac{N_{ij} \cdot L_{ij}^2}{EJ_{ij}} \quad \text{skąd dla prętów ściskanych} \quad \lambda_{ij}^2 = -\bar{\lambda}_{ij}^2 = \frac{|N_{ij}| \cdot L_{ij}^2}{EJ_{ij}}$$

Pomijając wpływ siły osiowej (teoria rzędu 1-go) równania (1.4) i (1.5) przyjmują postać

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EJ_{ij}} \quad (1.6)$$

Rozwiązanie równania (1.4) ma postać :

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot \lambda \cdot x + C_3 \cdot \cos\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right) + C_4 \cdot \sin\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right) + C_5 \quad (1.7)$$

a równania (1.5) postać :

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot \bar{\lambda} \cdot x + C_3 \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\bar{\lambda} \cdot x}{L}\right) + C_4 \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\bar{\lambda} \cdot x}{L}\right) + C_5 \quad (1.8)$$

gdzie C_1, C_2, C_3, C_4 są stałymi całkowania (funkcjami parametru λ (względnie $\bar{\lambda}$) wyznaczanymi na podstawie warunków brzegowych pręta a C_5 są rozwiązaniami szczególnymi równań różniczkowych (1.4) i (1.5).

Rozwiązania równań (1.4) i (1.5) oraz wszystkie wynikające z tych rozwiązań związki są wzajemnie związane zależnością (1.6) z której wynikają związki :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\bar{\lambda}_{ij} \cdot i) &= i \cdot \sin(\lambda_{ij}), & \operatorname{ch}(\bar{\lambda}_{ij} \cdot i) &= \cos(\lambda_{ij}), \\ \sin(\lambda_{ij} \cdot i) &= i \cdot \operatorname{sh}(\bar{\lambda}_{ij}), & \cos(\lambda_{ij} \cdot i) &= \operatorname{ch}(\bar{\lambda}_{ij}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

Uwzględniając związki

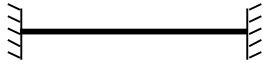


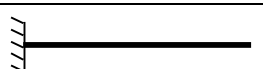
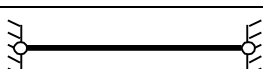
$$\begin{aligned} M_{ij} &= -EJ_{ij} \cdot \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}, & T_{ij} &= -EJ_{ij} \cdot \left[\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\lambda_{ij}^2}{L_{ij}^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} \\ M_{ji} &= -EJ_{ji} \cdot \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L_{ij}}, & T_{ji} &= -EJ_{ij} \cdot \left[\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\lambda_{ij}^2}{L_{ij}^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right]_{x=L_{ij}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

wzory transformacyjne dla dowolnego pręta prostego można przedstawić w postaci :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o \\ M_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o \\ T_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ij}^o \\ T_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ji}^o \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $\bar{\lambda}_{ij}^2$) są funkcjami parametrów λ_{ij} lub $\bar{\lambda}_{ij}$ zależnymi od typu pręta. Oznaczenia tych funkcji dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli

Tabela 1

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Składniki wzorów typu M_{ij}^o i T_{ij}^o są brzegowymi momentami i siłami tnącymi w stanie zerowych przemieszczeń brzegowych ($\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$) i mogą być wyznaczane np. z wykorzystaniem metody sił. Dla typowych obciążeń wartości te można zestawiono dla różnych typów prętów w tabelach poniżej.

Tabela 2

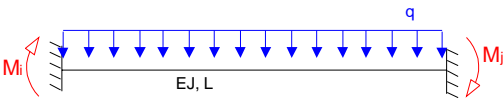
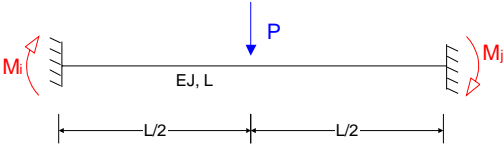
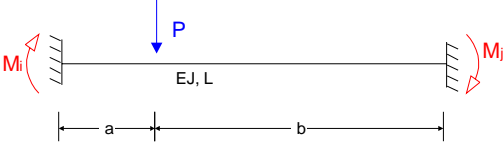
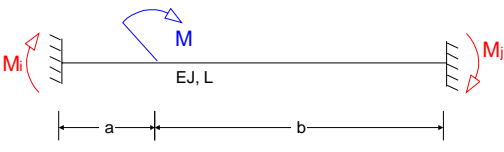
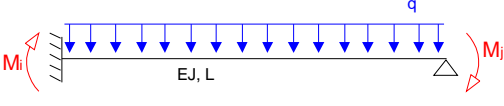
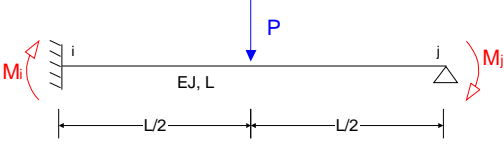
M_i	PRĘT SZTYWNO-SZTYWNY	M_j
$-\frac{qL^2}{12}$		$\frac{qL^2}{12}$
$-\frac{PL}{8}$		$\frac{PL}{8}$
$-\frac{Pab^2}{L^2}$		$\frac{Pa^2b}{L^2}$
$\frac{Mb}{L}(2 - \frac{3b}{L})$		$\frac{Ma}{L}(2 - \frac{3a}{L})$

Tabela 3

M_i	PRĘT SZTYWNO-PRZEGUBOWY	M_j
$-\frac{qL^2}{8}$		0
$-\frac{3PL}{16}$		0

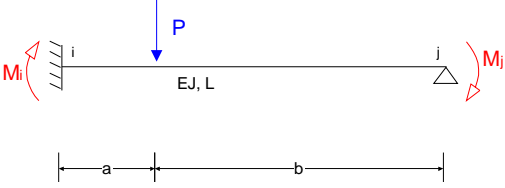
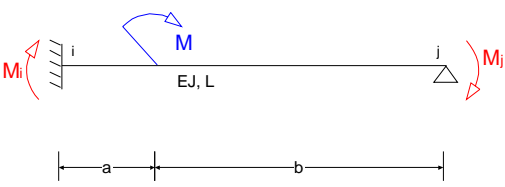
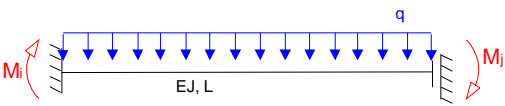
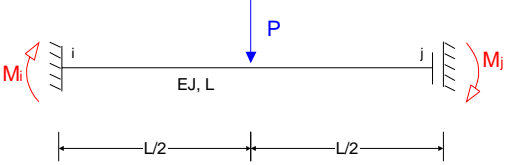
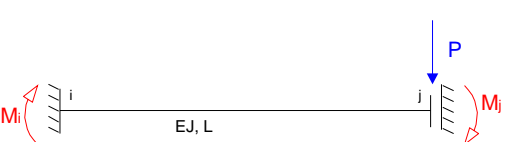
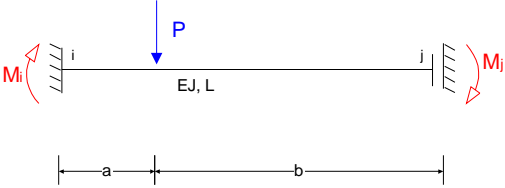
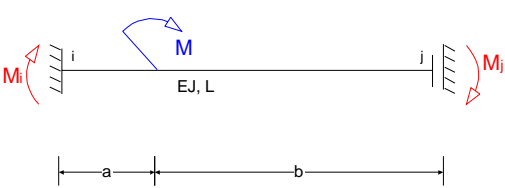
$-\frac{Pab}{2L^2}(L+b)$		<p>0</p>
$\frac{M}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{L} \right)^2 \right]$		<p>0</p>

Tabela 4

M_i	PRĘT SZTYWNY-ŁYŻWA	M_j
$-\frac{qL^2}{3}$		$-\frac{qL^2}{6}$
$-\frac{3PL}{8}$		$-\frac{PL}{8}$
$-\frac{PL}{2}$		$-\frac{PL}{2}$
$-\frac{Pa}{2} \left(2 - \frac{a}{L} \right)$		$\frac{Pa^2}{2L}$
$-\frac{Mb}{L}$		$-\frac{Ma}{L}$

Ogólna postać wzorów transformacyjnych (1.11) jest prawdziwa dla prętów prostych zarówno o stałej sztywności jak i o zmiennej sztywności. Wartości parametrów dla prętów o zmiennej sztywności a także dla innych typów prętów można znaleźć w literaturze. Wartości tych współczynników można stosunkowo łatwo wyznaczać wykorzystując ich interpretację i metodę sił. Na przykład jeśli przyjąć $\varphi_i = \psi_{ij} = M_{ij}^o = 0$, $\varphi_{ij} = 1$ (rys.1) to z wyrażenia określającego M_{ij} (1.11) wynika, że :

$$a_{ij} = \frac{L_{ij}}{EJ_{ij}} \cdot M_{ij}$$

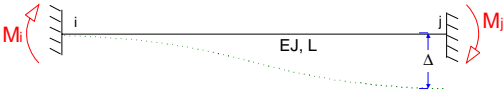
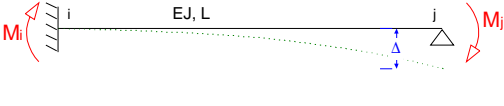
co oznacza, że współczynnik a_{ij} jest równy momentowi M_{ij} pomnożonemu przez $\frac{L_{ij}}{EJ_{ij}}$ a wywołanemu obrotem końca "i" pręta o kąt o wartości "1".

Tabela 5

$M_i = \frac{EJ}{L} a_{ij}$	JEDNOSTKOWE STANY ROTACYJNE	$M_j = \frac{EJ}{L} b_{ij}$
$4 \frac{EJ}{L}$		$2 \frac{EJ}{L}$
$3 \frac{EJ}{L}$		0
$\frac{EJ}{L}$		$-\frac{EJ}{L}$

Analogiczną interpretację mają wszystkie współczynniki.

Tabela 6

$M_i = -\frac{EJ}{L}c_{ij}$	JEDNOSTKOWE STANY TRANSLACYJNE $\psi_{ij} = 1$	$M_j = -\frac{EJ}{L}c_{ji}$
$-6\frac{EJ}{L}$		$-6\frac{EJ}{L}$
$-3\frac{EJ}{L}$		0

Przedstawione w tym punkcie związki, z wyjątkiem związku (1.1) są prawdziwe zarówno dla prętów nieodkształcalnych jak i odkształcalnych podłużnie.

2. TRANSFORMACJA PRZEMIESZCZEŃ GLOBALNYCH NA SIŁY BRZEGOWE

W wyniku działania obciążeń na konstrukcję ulega ona odkształceniom. Przesunięcia końców prętów równe są przesunięciom odpowiednich węzłów.

Każdy węzeł układu płaskiego ma 3 stopnie swobody (1 obrót i 2 składowe przesunięcia węzła), których liczba może być zmniejszona przez więzi podporowe. Układ prętów połączonych między sobą i z fundamentem w węzłach ma zatem $(2 \cdot w - r)$ stopni swobody przesuwu (w - liczba węzłów, r - liczba translacyjnych więzi podporowych). Zarówno kąty obrotu jak i składowe przesunięcia końców prętów wyrażają się bezpośrednio przez odpowiednie kąty obrotu węzłów :

$$\varphi_{ij} = \varphi_i, \quad \varphi_{ji} = \varphi_j. \quad (2.1)$$

i składowe przesunięcia węzłów.

Jeśli przyjąć, że pręty są nieodkształcalne podłużnie ($EA = \infty$) to liczba stopni swobody przesuwu układu zmniejsza się o liczbę prętów. Uwzględniając, że niektóre pręty mogą odbierać te same stopnie swobody, liczbę stopni swobody przesuwu układu można oszacować na podstawie zależności :

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r \quad (2.2)$$

gdzie : w - liczba węzłów,
 p - liczba prętów nieodkształcalnych podłużnie,
 r - liczba pojedynczych, translacyjnych więzi podporowych.

Niezbędna jest w tym przypadku transformacja przesunięć niezależnych na przesunięcia węzłów a właściwie na kąty obrotu cięciw prętów. Zależność między

niezależnymi składowymi przesunięć węzłów układu (δ_β) a kątami obrotu cięciw prętów (ψ_{ij}) ma postać :

$$\psi_{ij} = \sum_{\beta} \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} \quad (2.3)$$

gdzie : $\bar{\psi}_{ij}^{\beta}$ są kątami obrotu cięciw prętów wywołanymi przesunięciami $\delta_{\beta} = 1$.

Podstawiając do wzorów (1.10) związki (2.1) i (2.3) otrzymujemy wzory transformujące przemieszczenia w bazie globalnej na siły brzegowe

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ij} \cdot \varphi_i + b_{ij} \cdot \varphi_j - \sum_{\beta} c_{ji} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} \right) + M_{ij}^o \\ M_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ji} \cdot \varphi_j + b_{ji} \cdot \varphi_i - \sum_{\beta} c_{ji} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} \right) + M_{ji}^o \\ T_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot \left(-c_{ij} \cdot \varphi_i - c_{ji} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta} d_{ij} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} \right) + T_{ij}^o \\ T_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot \left(-c_{ij} \cdot \varphi_i - c_{ji} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta} d_{ij} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} \right) + T_{ji}^o \end{aligned} \quad (2.4)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń :

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}^i &= a_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad \bar{M}_{ji}^j = a_{ji} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad \bar{M}_{ji}^i = \bar{M}_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \\ \bar{M}_{ij}^{\beta} &= -c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta}, \quad \bar{M}_{ji}^{\beta} = -c_{ji} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \\ \bar{T}_{ij}^i &= \bar{T}_{ji}^i = -c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad \bar{T}_{ij}^j = \bar{T}_{ji}^j = -c_{ji} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \\ \bar{T}_{ij}^{\beta} &= \bar{T}_{ji}^{\beta} = d_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

wzory (2.4) mogą być przedstawione w postaci

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \bar{M}_{ij}^i \cdot \varphi_i + \bar{M}_{ij}^j \cdot \varphi_j + \sum_{\beta} \bar{M}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} + M_{ij}^o \\ M_{ji} &= \bar{M}_{ji}^j \cdot \varphi_j + \bar{M}_{ji}^i \cdot \varphi_i + \sum_{\beta} \bar{M}_{ji}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} + M_{ji}^o \\ T_{ij} &= \bar{T}_{ij}^i \cdot \varphi_i + \bar{T}_{ij}^j \cdot \varphi_j + \sum_{\beta} \bar{T}_{ij}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} + T_{ij}^o \\ T_{ji} &= \bar{T}_{ji}^i \cdot \varphi_i + \bar{T}_{ji}^j \cdot \varphi_j + \sum_{\beta} \bar{T}_{ji}^{\beta} \cdot \delta_{\beta} + T_{ji}^o \end{aligned} \quad (2.6)$$

Są to **wzory transformujące przemieszczenia w bazie globalnej na siły brzegowe pręta.**

3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Stopniem geometrycznej niewyznaczalności układu (n_g) nazywamy liczbę niezależnych składowych przemieszczeń - obrotów (n_ϕ) i składowych przesunięć (n_δ) - które w pełni określają przemieszczenia brzegowe prętów występujące we wzorach transformacyjnych prętów, na które układ może być rozłożony

$$n_g = n_\phi + n_\delta. \quad (3.1)$$

Liczba obrotów węzłów (n_ϕ) równa jest liczbie węzłów sztywnych, którym podpory nie odbierają możliwości obrotu. W celu wyznaczenia (n_ϕ) należy podzielić układ na pręty dla których dane są wzory transformacyjne; można poszczególnym elementom (w szczególności gdy brak odpowiednich do rozpatrywanego układu prętów, dla których dane są wzory transformacyjne) przyporządkowywać pręty o mniejszej liczbie składowych przemieszczeń swobodnych (np. pręt sztywno-sztywny można przyporządkować każdemu prętowi układu). Liczba węzłów sztywnych łączących te elementy, nie podpartych ze względu na obrót równa jest (n_ϕ).

Liczba niezależnych składowych przesunięć węzłów (n_δ), może być wyznaczona na podstawie analizy kinematycznej odpowiedniego modelu układu. Aby utworzyć z układu danego model umożliwiającą określenie liczby stopni swobody przesuwu należy :

1. usunąć więzi sprężyste,
2. zastąpić wszystkie węzły węzłami przegubowymi,
3. odebrać po jednym stopniu swobody przesuwu prętom, dla których we wzorach transformacyjnych $a_{ij} \neq 0$ lub $a_{ji} \neq 0$ i $c_{ij} = c_{ji} = 0$ i $d_{ij} = d_{ji} = 0$ (pręt wspornikowy i pręt sztywno-tyżwa - dla prętów tych ich stopnie swobody przesuwu poprzecznego uwzględnione zostały we współczynnikach a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$ i kąt obrotu cięciwy pręta nie występuje we wzorach transformacyjnych).

Liczba składowych (n_δ) może być oszacowana z wykorzystaniem zależności :

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r \quad (3.2)$$

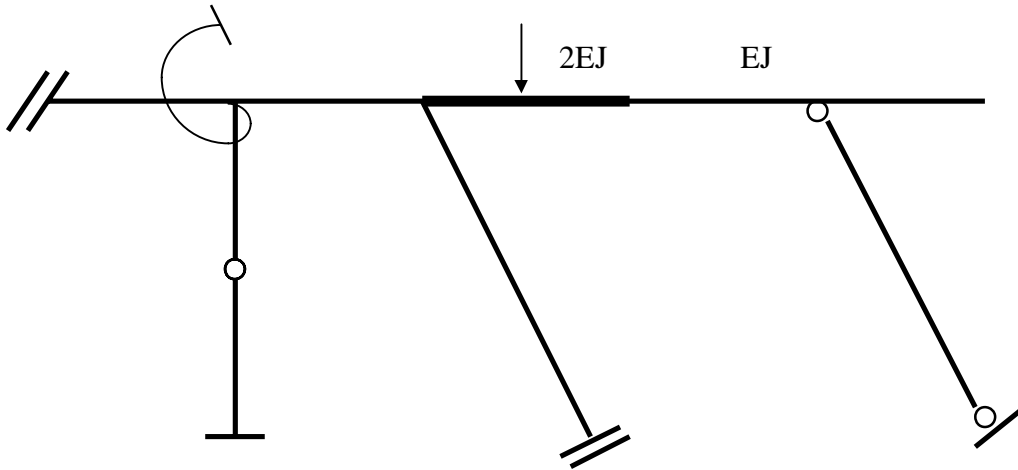
gdzie w - liczba węzłów modelu, p - liczba prętów modelu, r - liczba więzi podporowych modelu (liczba składowych reakcji).

Dla modelu przedstawionego na rys. 2 poniżej :

$$w = 14, p = 13, r = 12 \quad \text{a więc} \quad n_\delta \geq 2 \cdot 14 - 13 - 12 = 3.$$

Rzeczywistą wartość (n_δ) można określić tylko w wyniku analizy kinematycznej układu. Analiza taka może polegać na poszukiwaniu najmniejszej liczby więzi niezbędnych do przekształcenia modelu kinematycznego w układ geometrycznie niezmienny, przy czym liczba ta nie może być mniejsza niż określona na podstawie związku (3.2).

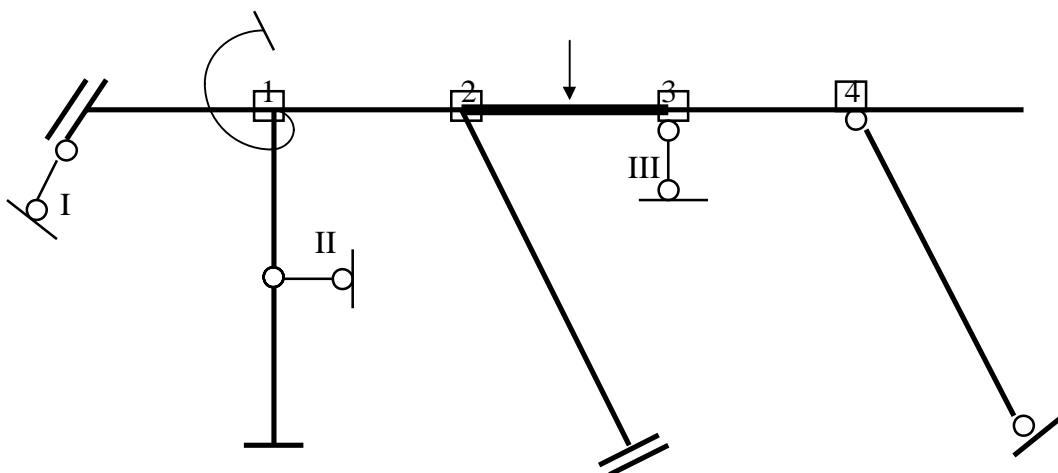
W rozpatrywanym przykładzie niezbędne jest dodanie co najmniej 3 więzi. Jeśli dodać 3 więzi to model staje się układem geometrycznie niezmiennym. zatem w rozpatrywanym przykładzie $n_{\delta} = 3$.



Rysunek 2 . Układ dany

4. UKŁAD PODSTAWOWY

Układ podstawowy w metodzie przemieszczeń tworzony jest przez odebranie stopni swobody węzłom układu danego, określonych w trakcie wyznaczania stopnia geometrycznej niewyznaczalności jako niezależne. Należy zatem nałożyć więzi odbierające możliwości obrotu węzłów sztywnych w liczbie n_{ϕ} i więzi odbierające stopnie swobody przesuwu w liczbie n_{δ} . Na przykład układem podstawowym układu przedstawionego na rys. 2 jest układ przedstawiony na rys. 3.



Rysunek 3 Układ podstawowy

5. RÓWNANIA KANONICZNE W TEORII RZĘDU I-go

Aby rozwiązanie układu podstawowego i danego były identyczne, siły w dodanych więziach muszą być równe zero co daje n_φ warunków typu :

$$M_i = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n_\varphi,$$

i n_δ warunków typu :

$$R_\alpha = 0, \quad \text{dla } \alpha = I, II, \dots, n_\delta. \quad (5.1)$$

Pełny układ równań kanonicznych może być zapisany w postaci

$$\begin{aligned} \sum_j k_{ij} \cdot \varphi_j + \sum_\beta k_{i\beta} \cdot \delta_\beta + k_{io} &= 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n_\varphi \\ \sum_j k_{\alpha j} \cdot \varphi_j + \sum_\beta k_{\alpha\beta} \cdot \delta_\beta + k_{\alpha o} &= 0, \quad \text{dla } \alpha = 1, 2, \dots, n_\delta \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie

$k_{ij} \cdot \varphi_j$, $k_{i\beta} \cdot \delta_\beta$ są momentami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt φ_j ,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi "β" o δ_β ,

k_{ij} , $k_{i\beta}$, k_{io} są momentami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi: odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi "β" o $\delta_\beta = 1$ obciążeniem zewnętrznym.

$k_{\alpha j} \cdot \varphi_j$, $k_{\alpha\beta} \cdot \delta_\beta$ są siłami w translacyjnej więzi "α" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt φ_j ,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi "β" o δ_β ,

$k_{\alpha j}$, $k_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha o}$ są siłami w translacyjnej więzi "α" wywołanymi: odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi "β" o $\delta_\beta = 1$, obciążeniem zewnętrznym.

Z powyższego wynika, że współczynniki "k" mogą być podzielone na 6 grup :

- momenty w dodanych więziach rotacyjnych wywołane:

1. obrotami ($K_{\varphi\varphi} = [k_{ij}]$),
2. przesunięciami ($K_{\varphi\delta} = [k_{i\beta}]$),
3. obciążeniem zewnętrznym ($K_{\varphi o} = k_{io}$)

- reakcje w dodanych więziach translacyjnych wywołane:
 4. obrotami ($K_{\delta\varphi}=[k_{\alpha j}]$)
 5. przesunięciami ($K_{\delta\delta}=[k_{\alpha\beta}]$),
 6. obciążeniem zewnętrznym ($K_{\delta o}=[k_{\alpha o}]$).

W zapisie macierzowym układ równań może być przedstawiony w postaciach

$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi o} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta o} \end{bmatrix} = \quad (5.3)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{\varphi\varphi} & K_{\varphi\delta} \\ K_{\delta\varphi} & K_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\varphi o} \\ K_{\delta o} \end{bmatrix} = K \cdot \vec{z} + K_o = 0$$

Wzory określające współczynniki "k" zestawiono poniżej

1. Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami dodanych więzi rotacyjnych

$$K_{\varphi\varphi}; \quad k_{ii} = \sum_j \overline{M}_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} + k_i^\varphi, \quad k_{ij} = \overline{M}_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad j \neq i,$$

2. Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$$K_{\varphi\delta}; \quad k_{i\beta} = \sum_j \overline{M}_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\beta,$$

3. Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane obciążeniem danym

$$K_{\varphi o}; \quad k_{i0} = \sum_j M_{ij}^o - M_i^o$$

4. Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami więzi rotacyjnych

$$K_{\delta\varphi}; \quad k_{\alpha j} = -\sum_i (\overline{M}_{ij}^j + \overline{M}_{ji}^j) \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\alpha = \sum_i \overline{T}_{ij}^j \cdot \overline{\Delta}_{ij}^\alpha = -\sum_i c_{ji}^j \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\alpha,$$

5. Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$$\begin{aligned}
 K_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\beta} &= -\sum_{ij} (\overline{M}_{ij}^\beta + \overline{M}_{ji}^\beta) \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\alpha + \sum_s k_i^\delta \cdot \Delta \overline{L}_i^\alpha \cdot \Delta \overline{L}_i^\beta = \\
 &= \sum_{ij} \overline{T}_{ij}^\beta \cdot \overline{\Delta}_{ij}^\alpha + \sum_s k_i^\delta \cdot \Delta \overline{L}_i^\alpha \cdot \Delta \overline{L}_i^\beta = \sum_{ij} d_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\alpha \cdot \overline{\Psi}_{ij}^\beta + \sum_s k_i^\delta \cdot \Delta \overline{L}_i^\alpha \cdot \Delta \overline{L}_i^\beta,
 \end{aligned}$$

6. Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane obciążeniem danym

$$K_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\alpha} = -\sum_{ij} (\bar{M}_{ij}^o + \bar{M}_{ji}^o) \cdot \bar{\psi}_{ij}^{\alpha} - \sum_p P_p \cdot \bar{\delta}_p^{\alpha} - \sum_m M_m^o \cdot \bar{\psi}_m^{\alpha}$$

Rozwiązanie układu równań stanowią kąty obrotu węzłów i przesunięcia w miejscach i kierunkach dodanych więzi. Na ich podstawie określone są bezpośrednio kąty obrotu końców prętów, a wykorzystując związek (2.3) można wyznaczyć rzeczywiste kąty obrotu cięciw prętów.

6. RZECZYWISTE SIŁY PRZEKROJOWE

Momenty brzegowe mogą być określone :

1. Na podstawie związków (2.4),
2. Na podstawie związków (2.6) jeśli uprzednio wyznaczono momenty $\bar{M}_{ij}^i, \bar{M}_{ij}^{\beta}$ na podstawie związków (2.5),
3. Na podstawie związków (1.10) po uprzednim wyznaczeniu rzeczywistych kątów obrotu cięciw prętów na podstawie związku (2.3),

Brzegowe siły tnące mogą być określone :

1. Na podstawie związków (2.4),
2. Na podstawie związków (2.6) jeśli uprzednio wyznaczono siły tnące $\bar{T}_{ij}^i, \bar{T}_{ij}^{\beta}$ na podstawie związków (2.5),
3. Na podstawie związków (1.10) po uprzednim wyznaczeniu rzeczywistych kątów obrotu cięciw prętów na podstawie związku (2.3),
4. Na podstawie równań równowagi sił działających na pręty.

Brzegowe siły osiowe na ogół mogą być określone :

1. na podstawie równań równowagi rzutów sił działających na węzły z wykorzystaniem równań równowagi rzutów na oś pręta sił działających na pręty.
2. Jeśli z równań tych nie da się wyznaczyć wszystkich sił osiowych to do ich wyznaczenia niezbędne jest rozwiązanie z uwzględnieniem odkształcalności podłużnej.
3. Jeśli zbudować wszystkie równania równowagi dla prętów i węzłów to pozwala to na wyznaczenie brzegowych sił tnących na ogół brzegowych sił osiowych i stanowi kontrolę statycznej dopuszczalności rozwiązania.
4. Dla pełnej kontroli rozwiązania niezbędne jest sprawdzenie jego kinematycznej dopuszczalności w powiązaniu z siłami to jest sprawdzenie warunków ciągłości układu.

Po wyznaczeniu sił brzegowych sporządza się wykresy sił przekrojowych z wykorzystaniem równań równowagi i zasady superpozycji.