
STATECZNOŚĆ RAM PŁASKICH ZŁOŻONYCH Z PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH

SPIIS TREŚCI

1. WZORY TRANSFORMACYJNE WEDŁUG TEORII RZĘDU II-GO	2
2. ZASTOSOWANIE METODY PRZEMIESZCZEŃ W ANALIZIE STATECZNOŚCI.....	5

1. WZORY TRANSFORMACYJNE WEDŁUG TEORII RZĘDU II-go

Wzorami transformacyjnymi nazywamy zależności między siłami brzegowymi a przemieszczeniami brzegowymi pręta.

Wzory transformacyjne dla dowolnego pręta prostego można przedstawić w postaci :

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o \\
 M_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o \\
 T_{ij} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ij}^o \\
 T_{ji} &= \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ji}^o
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $\bar{\lambda}_{ij}^2$) są funkcjami parametrów λ_{ij} lub $\bar{\lambda}_{ij}$ zależnymi od typu pręta. W teorii I-go rzędu są to liczby.

Oznaczenia tych funkcji dla wybranych typów prętów o stałej sztywności

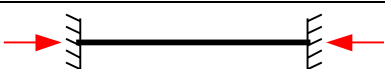
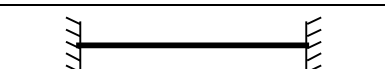
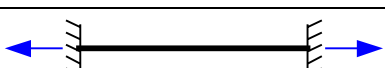
ściskanych - teoria II-go rzędu

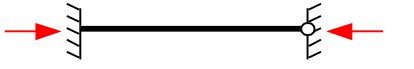
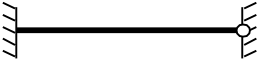
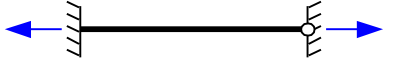
nie obciążonych - teoria I-go rzędu

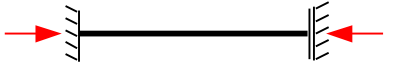

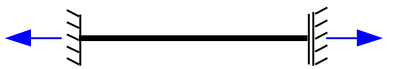
rozciąganych - teoria II-go rzędu



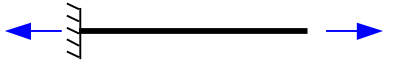
zestawiono w tabeli 1, a określenie tych funkcji stanowią związki (1.2) do (1.9).



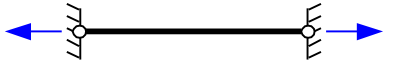
Tabela 1

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$

	$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
	3	0	0	3	0	3
	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$

	$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\lambda)$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
	1	1	-1	0	0	0
	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0

	$\alpha'''(\lambda)$	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	$\alpha'''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	$\bar{\lambda}^2$

Funkcje z tabeli 1, określające parametry we wzorach transformacyjnych mają następujące postacie :

- dla pręta "sztywno-sztywnego"

- **ściskanego**

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}, \quad \beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\delta(\lambda) = 2 \cdot \vartheta(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda} \quad (1.2)$$

- rozciąganego

$$\begin{aligned}\alpha(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda} \cdot \frac{\text{sh}\bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cdot \text{ch}\bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch}\bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh}\bar{\lambda}}, & \beta(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - \text{sh}\bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch}\bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh}\bar{\lambda}}, \\ \vartheta(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - \text{ch}\bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch}\bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh}\bar{\lambda}}, & \delta(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch}\bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh}\bar{\lambda}},\end{aligned}\quad (1.3)$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego

$$\begin{aligned}\alpha'(\lambda) &= \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}, & (1.4) \\ \delta'(\lambda) &= \delta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},\end{aligned}$$

- rozciąganego

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{\text{sh}\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch}\bar{\lambda} - \text{sh}\bar{\lambda}}, \quad \delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\text{ch}\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch}\bar{\lambda} - \text{sh}\bar{\lambda}} \quad (1.5)$$

- dla pręta "sztywno-łyżwowego"

- ściskanego

$$\begin{aligned}\alpha''(\lambda) &= \alpha(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \alpha(\lambda) \cdot \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \lambda \cdot \text{ctg} \lambda, \\ \beta''(\lambda) &= \beta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\sin \lambda},\end{aligned}\quad (1.6)$$

- rozciąganego

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{cth}\bar{\lambda}, \quad \beta''(\bar{\lambda}) = -\frac{\bar{\lambda}}{\text{sh}\bar{\lambda}}, \quad (1.7)$$

- dla wspornika

- ściskanego

$$\alpha'''(\lambda) = -\lambda \cdot \text{tg} \lambda, \quad (1.8)$$

- rozciąganego

$$\alpha'''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{th}\bar{\lambda}. \quad (1.9)$$

Z przedstawionych związków wpływ rzędu 2-go może być wyeliminowany przez przyjęcie $N_{ij} = \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij} = 0$ co sprowadza parametry a_{ij} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} =$

$a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ do współczynników liczbowych. Wartości tych współczynników dla wybranych typów prętów zestawiono także w tabeli 1.

2. ZASTOSOWANIE METODY PRZEMIESZCZEŃ W ANALIZIE STATECZNOŚCI

Problem możliwości utraty stateczności układu definiowany jest, w ujęciu klasycznym, jako możliwość istnienia różnych stanów przemieszczeń odpowiadających temu samemu obciążeniu. Biorąc układ równań metody przemieszczeń

$$K \cdot \overset{p}{z} + K_0 = 0$$

widzimy, że może on mieć rozwiązania niejednoznaczne tylko wtedy gdy wyznacznik macierzy sztywności $[K]$ jest równy zero

$$\det(K) = 0 \quad (2.1)$$

Nie jest to możliwe w teorii rzędu 1-go gdyż w tym przypadku macierz sztywności jest dodatnio określona a więc $(\det(K) > 0)$, a układ równań ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie. Jest to natomiast możliwe gdy zadanie rozwiązywać według teorii rzędu 2-go, gdyż w tym przypadku elementy macierzy sztywności są funkcjami sił osiowych, których wartości można tak dobrać by zachodził warunek (2.1) - zwany równaniem stateczności.

Należy tu podkreślić, że możliwe to będzie do osiągnięcia gdy przynajmniej jeden pręt układu będzie ściskany.

Nasze rozważania ograniczamy do przypadku gdy obciążenia rosną proporcjonalnie od dowolnego poziomu bezpiecznego do takiego, przy którym będzie spełniony warunek (2.1). Możemy to zrealizować wprowadzając, jednakowy dla wszystkich parametrów obciążenia, mnożnik (m) .

Jeśli więc znane są wartości sił osiowych (N_{ij}) od określonego obciążenia to ich wartości od obciążenia m razy większego wynoszą $(m \cdot N_{ij})$. Ilorazy sił osiowych dla każdych dwóch prętów nie ulegają zmianie wraz ze wzrostem poziomu obciążenia. N_p dla prętów (ij) i (pk) iloraz ten wynosi :

$$\frac{m \cdot N_{ij}}{m \cdot N_{pk}} = \frac{N_{ij}}{N_{pk}}$$

Wynika stąd, że także ilorazy parametrów λ_{ij} nie ulegają zmianie wraz ze wzrostem poziomu obciążenia

$$\frac{m \cdot \lambda_{ij}}{m \cdot \lambda_{pk}} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{pk}}$$

Jeśli więc przyjąć jako podstawowy parametr λ_{pk} i oznaczyć go przez λ_o to parametry λ_{ij} dla wszystkich prętów (także rozciąganych) mogą być wyrażone przez ten parametr

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_o} = \frac{L_{ij}}{L_{pk}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot N_{ij} \cdot EJ_{pk}}{m \cdot N_{pk} \cdot EJ_{ij}}} = \frac{L_{ij}}{L_{pk}} \cdot \sqrt{\frac{N_{ij} \cdot EJ_{pk}}{N_{pk} \cdot EJ_{ij}}}$$

gdzie γ_{ij} jest liczbą określoną związkiem $\gamma_{ij} = \frac{L_{ij}}{L_{pk}} \cdot \sqrt{\frac{N_{ij} \cdot EJ_{pk}}{N_{pk} \cdot EJ_{ij}}}$.

Uwzględniając powyższy związek, parametry sztywności we wzorach transformacyjnych - będące funkcjami parametrów λ_{ij} różnych dla różnych prętów - stają się funkcjami jednego, dla wszystkich prętów układu, parametru λ .

Uwzględniając fakt, że w rozważanym przypadku wszystkie λ_{ij} oraz $\bar{\lambda}_{ij}$ są wyrażone przez jeden tylko parametr λ , elementy macierzy sztywności układu i wyznacznik tej macierzy są funkcjami tego pojedynczego parametru. Równanie stateczności ma zatem postać :

$$\det[\mathbf{K}(\lambda)] = 0 \quad (2.2)$$

W wyniku rozwiązania tego równania - na ogół metodą prób - otrzymuje się wartość krytyczną parametru λ to jest λ^{kr} . Wykorzystując odpowiedni związek można wyznaczyć wartości krytyczne parametrów λ_{ij} to jest λ_{ij}^{kr} a następnie wartość krytyczną mnożnika obciążenia :

$$m = \frac{(\lambda_{ij}^{kr})^2 \cdot EJ_{ij}}{L_{ij}^2 \cdot N_{ij}} \quad (2.3)$$

i wartości krytyczne sił osiowych :

$$N_{ij}^{kr} = N_{ij} \cdot m = N_{ij} \cdot \frac{(\lambda_{ij}^{kr})^2 \cdot EJ_{ij}}{L_{ij}^2 \cdot N_{ij}} \quad (2.4)$$

Podstawowym celem tej analizy jest jednak wyznaczenie **długości wyboczeniowych L^w** prętów ściskanych. Pojęcie długości wyboczeniowej związane jest z wzorem Eulera określającym siłę krytyczną ściskającą pojedynczy pręt

$$N_{ij}^{kr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_{ij}}{(L_{ij}^w)^2} \quad (2.5)$$

Związek określający wzór określający długość wyboczeniową :


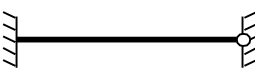

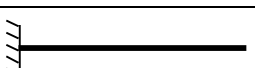
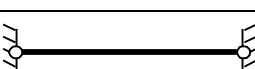
$$L_{ij}^w = \frac{\pi}{\lambda_{ij}^{kr}} \cdot L_{ij} = \mu_{ij} \cdot L_{ij} \quad (2.6)$$

gdzie $\mu_{ij} = \frac{\pi}{\lambda_{ij}^{kr}}$ jest współczynnikiem długości wyboczeniowej pręta.

Na zakończenie należy podkreślić, że otrzymane rozwiązanie uwzględnia tylko taką możliwość utraty stateczności, która związana jest z przemieszczeniami w bazie globalnej (obroty węzłów i przemieszczenia w miejscach i kierunkach dodanych więzi prowadzące do obrotów cięciw prętów). Nie uwzględnia zaś ono możliwości utraty stateczności przez poszczególne pręty bez tego typu przemieszczeń - czyli tzw. lokalnej utraty stateczności poszczególnych prętów.

Jak wiadomo, współczynniki długości wyboczeniowej lokalne poszczególnych typów prętów μ_{ij}^{lok} związane są z postaciami utraty ich stateczności i przyjmują wartości podane poniżej.

Tabela 2

typ pręta	μ_{ij}^{lok} $(\mu_{ij}^{lok} < \mu_{ij})$	$\lambda_{ij}^{lok} = \frac{\pi}{\mu_{ij}^{lok}}$ $(\lambda_{ij}^{lok} < \lambda^{kr})$
	0.5	6.2832
	0.7	4.4880
	1	3.1416
	2	1.5708
	1	3.1416

Policzona wartość parametru λ^{kr} dla układu nie może być mniejsza od podanych w tabeli 2 wartości λ_{ij}^{lok} dla prętów, oraz policzone wartości współczynników długości wyboczeniowej μ_{ij} dla prętów nie mogą być mniejsze od podanych w zestawieniu wartości lokalnych współczynników długości wyboczeniowej μ_{ij}^{lok} .

Jeśli w wyniku poprawnego rozwiązania "globalnego" otrzyma się dla któregoś pręta wartość krytyczną λ_{ij}^{lok} większą od podanej w zestawieniu to jako krytyczną należy przyjąć podaną w zestawieniu i na tej podstawie określić pozostałe parametry.

Nadmienić tu trzeba, że jest to mało prawdopodobne by możliwa postać globalnej utraty stateczności była taka, że któryś z pierwszych czterech typów prętów nie doznał odkształceń.

Otrzymanie dla któregoś z tych prętów wartości λ_{ij}^{lok} większej od podanej w zestawieniu na ogół świadczy o błędnym rozwiązaniu. Dla pręta typu piątego to czy nastąpi globalna czy lokalna utrata stateczności zależy od rozkładu sił osiowych w układzie .